2018年京大文$\boxed{5}$

(1)

X_nが最大になるのは、n回とも「0」の球を取り出したときで、このとき

$$X_n=1+2+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{(n+2)(n-1)}{2}=1$ であるから、$X_n \geqq \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$ となるのは、

$i)$ n回とも「0」の球を取り出したとき

$ii)$ $n-1$ 回目まで「0」の球を取り出し、n回目に「$n-1$」の玉を取り出したとき

のいずれかであるから、求める確率は

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{2}{n!}\ \cdots\cdots(答)$$

(2)

X_nが最小になるのは、2回目以降、常に「1」の球を取り出したときで、このとき　$X_n=n$

$X_n \leqq n+1$ となるのは、

$i)$ 2回目以降、常に「1」の球を取り出したとき

$ii)$ 2回目以降、一度だけ「0」の球を取り出し、他は「1」の玉を取り出したとき

のいずれかである。

$i)$の場合の確率は　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n-2}{n-1}\cdot\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{1}{n}$

$ii)$の場合、k回目$(2\leqq k\leqq n)$に「0」の球を取り出す確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{k-2}{k-1}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{k-1}{k+1}\cdots\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n}=\frac{1}{n(n-1)}$$

求める確率は　$\dfrac{1}{n}+(n-1)\times\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{2}{n}\ \cdots\cdots(答)$