

2018 年京大理 1

(1)

$f(x) = ax^2, g(x) = b(x-1)^2 + c$  とする。  $C_1, C_2$  の接点の  $x$  座標を  $t$  とすると

$$f'(t) = g'(t) \text{ より } 2at = 2b(t-1) \text{ ——①}$$

$$f(t) = g(t) \text{ より } at^2 = b(t-1)^2 + c \text{ ——②}$$

$$a \neq 0 \text{ より、 } t \neq 1 \text{ であるから、①より } b = \frac{at}{t-1}$$

$$\text{②に代入して } at^2 = at(t-1) + c \quad at = c \quad \therefore t = \frac{c}{a} \quad \text{求める接点は } \therefore \left(\frac{c}{a}, \frac{c^2}{a}\right) \dots\dots (\text{答})$$

(2)

$$x = \frac{c}{a}, y = \frac{c^2}{a} \text{ とすると、 } x \neq 0 \text{ であり、 } y = cx = ax^2 \text{ より } \therefore c = \frac{y}{x}, a = \frac{y}{x^2}$$

$$\text{条件 i) に代入すると } 1 + \frac{y^2}{x^2} \leq 2 \frac{y}{x^2} \quad x^2 + y^2 \leq 2y \quad \therefore x^2 + (y-1)^2 \leq 1$$

(1) より  $x \neq 1$  であることに注意して、存在範囲は右図の通り。

$y$  軸上の点は除く。

境界線は点  $(0, 0), (1, 1), (0, 2)$  を除き含む。

