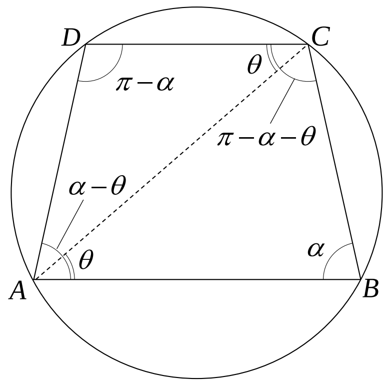
2018 年京大理 $\boxed{3}$



四角形$ABCD$は等脚台形である。
対角線ACを引き、$\angle CAB=\theta(0<\theta<\alpha)$とすると、$AB /\!/ DC$より、
$\angle ACD=\theta$である。

ACで分割された 2 つの三角形の、外接円の半径は 1 であるから、
正弦定理により

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{DA}{\sin\angle DCA}=2\cdot 1$$

$$AB=2\sin(\pi-\alpha-\theta)=2\sin(\alpha+\theta)\quad BC=2\sin\theta$$

$$CD=2\sin(\alpha-\theta)\quad DA=2\sin\theta$$

$$\begin{aligned}k&=AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA=16\sin^2\theta\sin(\alpha+\theta)\sin(\alpha-\theta)\\&=4(1-\cos 2\theta)\{\cos((\alpha+\theta)-(\alpha-\theta))-\cos((\alpha+\theta)+(\alpha-\theta))\}\\&=4(1-\cos 2\theta)(\cos 2\theta-\cos 2\alpha)=4\{-\cos^2 2\theta+(1+\cos 2\alpha)\cos 2\theta-\cos 2\alpha\}\\&=4\left\{-\left(\cos 2\theta-\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2+\frac{(1+\cos 2\alpha)^2}{4}-\cos 2\alpha\right\}\\&=-4\left(\cos 2\theta-\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2+(1-\cos 2\alpha)^2=-4\left(\cos 2\theta-\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2+4\sin^4\alpha\end{aligned}$$

$0<\theta<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$より　$0<2\theta<2\alpha\leqq\pi$　$-1\leqq\cos 2\alpha<\cos 2\theta<1$ であるから、

$\cos 2\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha+\cos 2\alpha}{2}<\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}<\dfrac{1+1}{2}=1$ より、kは$\cos 2\theta=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$のとき最大となる。

kの最大値は　$\therefore 4\sin^4\alpha$ $\cdots\cdots$(答)