2018年京大理$\boxed{4}$

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$とすると　$\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\overline{\omega}$

z_nがとり得る値は、$1,\omega,\omega^2$のいずれかである。$z_n=1,\omega,\omega^2$となる確率を、それぞれa_n, b_n, c_nとする。

$z_n=1$のとき　表が出れば$z_{n+1}=\omega$、裏が出れば$z_{n+1}=1$

$z_n=\omega$のとき　表が出れば$z_{n+1}=\omega^2$、裏が出れば$z_{n+1}=\overline{\omega}=\omega^2$　いずれにしても$z_{n+1}=\omega^2$となる。

$z_n=\omega^2$のとき　表が出れば$z_{n+1}=\omega^3=1$、裏が出れば$z_{n+1}=\overline{\omega^2}=\omega$

以上により、以下の漸化式を得る。

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}c_n$ ――①　$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}c_n$ ――②　$c_{n+1}=b_n$ ――③

$a_1=b_1=\dfrac{1}{2}$であり、①②より$a_n=b_n$がわかる。③より$c_{n+1}=a_n$であるから

$$a_{n+2}=\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}c_{n+1}=\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n \quad a_{n+2}+\frac{1}{2}a_{n+1}=a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n$$

これより、$a_{n+1}+\dfrac{1}{2}a_n$は一定である。$a_1=\dfrac{1}{2}$、$c_1=0$より$a_2=\dfrac{1}{4}$であるから

$$a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n=a_2+\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2} \quad a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{3}\right) \quad a_n-\frac{1}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

求める確率は　$\therefore \dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ ……(答)