2018 年京大理 $\boxed{5}$

(1)

点Aにおける接線の傾きは$\dfrac{1}{t}$であるから、法線の傾きは$-t$である。

この法線と平行なベクトルを$(k,-tk)$とおき、大きさが 1 であるとすると　$(1+t^2)k^2=1$　$k^2=\dfrac{1}{1+t^2}$

Bのx座標がtより大きいことから、Bの座標は　$\therefore \left(u(t),v(t)\right)=\left(t+\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}},\log t-\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ ……(答)

$$\frac{du}{dt}=1-\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=1-\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\quad \frac{dv}{dt}=\frac{1}{t}-\frac{\sqrt{1+t^2}-\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}=\frac{1}{t}-\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \left(\frac{du}{dt},\frac{dv}{dt}\right)=\left(1-\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{1}{t}-\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\text{ ……(答)}$$

(2)

$$L_2(r)=\int_r^1\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt=\int_r^1\sqrt{(1+t^2)\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2}\,dt$$

$r\leqq t\leqq 1$ のとき、$\dfrac{1}{t}\geqq 1$、$\dfrac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}<1$ より、$\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}>0$ であるから

$$\therefore L_2(r)=\int_r^1\sqrt{1+t^2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dt=\int_r^1\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$L_1(r)=\displaystyle\int_r^1\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt=\int_r^1\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt$ であるから

$$L_1(r)-L_2(r)=\int_r^1\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt-\int_r^1\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\int_r^1\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$t=\tan\theta$とおく。　$dt=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$　$r=\tan\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}\right)$とすると

t	$r\to 1$
θ	$\alpha\to\dfrac{\pi}{4}$

$$\int_r^1\frac{1}{1+t^2}\,dt=\int_\alpha^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_\alpha^{\frac{\pi}{4}}d\theta=[\theta]_\alpha^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\alpha$$

$r\to+0$ のとき、$\alpha\to+0$ であるから　$\therefore \displaystyle\lim_{r\to+0}\left(L_1(r)-L_2(r)\right)=\frac{\pi}{4}$ ……(答)