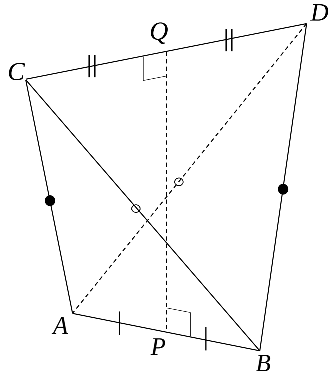
2018年京大理 $\boxed{6}$ 文 $\boxed{4}$ 共通

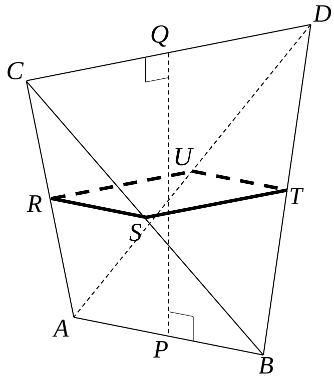


(1)

$\triangle CDA \equiv \triangle DCB$であるから、$QA = QB$が成り立つ。

すなわち、$\triangle QAB$は二等辺三角形であるから、QからABに下ろした垂線の足は、ABの中点に一致する。

したがって、辺ABは線分PQと垂直である。(証明終)



(2)

(1)と同様にして、辺CDも線分PQと垂直であることがわかる。

今、線分PQと直交する平面βを考え、βによる四面体$ABCD$の断面を考える。

βと、辺AC, BC, BD, ADの交点を、それぞれ R, S, T, Uとする。

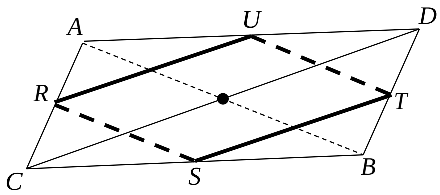
βは、辺 AB, CDの両方と平行であるから、

$AB \parallel RS, AB \parallel UT$より、$RS \parallel UT$が成り立つ。

$CD \parallel RU, CD \parallel ST$より、$RU \parallel ST$が成り立つ。

これより、βによる四面体$ABCD$の断面は、常に平行四辺形であり、なおかつ中心において線分PQと直交している。

したがって、PQを含むいかなる平面 α によっても、四面体$ABCD$の断面に現れる平行四辺形は、必ず面積が二等分される。



PQに垂直な面への正射影

断面積を線分PQ方向に積分したものが体積になるから、線分PQを含む平面 α によって四面体$ABCD$を 2 つの部分に分けたとき、2 つの部分の体積は等しい。(証明終)

※(1)は座標を設定したりベクトルを利用したりして計算で示すことも可能。
(2)は対称性に着目するが、この程度の論証で十分だろうか？