

2019 年京大文 ③

$f(x) = ax^2 + bx + c$ とする。

$a < 0$  のとき  $y = f(x)$  のグラフは上に凸である。

このとき、いかなる  $b, c$  に対しても  $f(x) < 0$  となる  $x$  が存在する。すなわち、 $c$  は任意。

$a = 0$  のとき  $y = f(x)$  のグラフは直線である。

$b \neq 0$  であれば  $f(x) < 0$  となる  $x$  が存在するが、 $b = 0$  であれば  $c < 0$  が必要である。すなわち、 $c < 0$ 。

$a > 0$  のとき  $y = f(x)$  のグラフは下に凸である。

$f(x) < 0$  となる  $x$  が存在するには、 $f(x) = 0$  が相異なる 2 実数解を持てばよい。

$$D = b^2 - 4ac > 0 \quad b^2 > 4ac$$

$b^2 \geq 0$  であり、これが任意の  $b$  について成立するには  $4ac < 0 \quad a > 0$  であるから  $\therefore c < 0$

以上により、求める必要十分条件は

$a < 0$  または  $(a \geq 0 \text{ かつ } c < 0)$  …… (答)

$(a, c)$  の存在範囲は右の通り。境界線を含まない。

