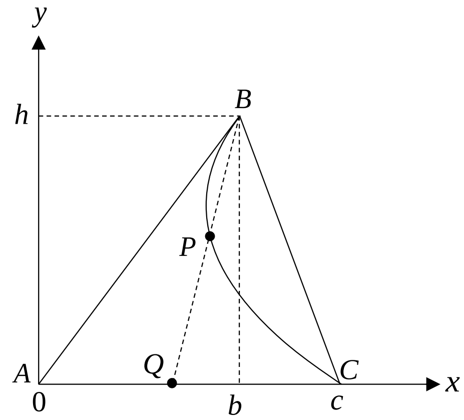
2019 年京大理 $\boxed{3}$

$A(0,0), B(b,h), C(c,0)$としても一般性を失わない。

条件により、$0<b<c, 0<h$ であり、$S=\dfrac{1}{2}ch$ で与えられる。

$\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} ct \\ 0 \end{pmatrix}$ より　$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AQ}=\begin{pmatrix} (1-t)b+ct^2 \\ (1-t)h \end{pmatrix}$



$x=(1-t)b+ct^2, y=(1-t)h$ として、tを消去すると

$$x=\frac{b}{h}y+c\left(1-\frac{y}{h}\right)^2=\frac{c}{h^2}y^2+\frac{b-2c}{h}y+c$$

これはx軸に平行な軸を持つ放物線の方程式である。

直線BCの方程式は、$x=c-\dfrac{c-b}{h}y$で与えられる。Pが描く曲線と線分BCで囲まれる部分の面積は

$$\int_0^h\left\{\left(c-\frac{c-b}{h}y\right)-\left(\frac{c}{h^2}y^2+\frac{b-2c}{h}y+c\right)\right\}dy=\int_0^h\left(-\frac{c}{h^2}y^2+\frac{c}{h}y\right)dy=-\frac{c}{h^2}\int_0^h(y^2-hy)dy$$

$$=-\frac{c}{h^2}\left[\frac{y^3}{3}-\frac{hy^2}{2}\right]_0^h=\frac{c}{h^2}\cdot\frac{h^3}{6}=\frac{1}{6}ch=\frac{1}{3}S\ \cdots\cdots(\text{答})$$

※辺ACを軸上にとると、Pが描く曲線は放物線であることがわかる。
　辺BCを軸上にとっても計算はできるが、Pが描く曲線をイメージしにくい。