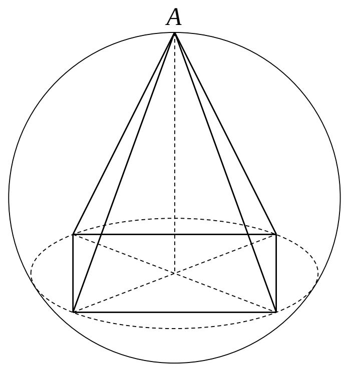
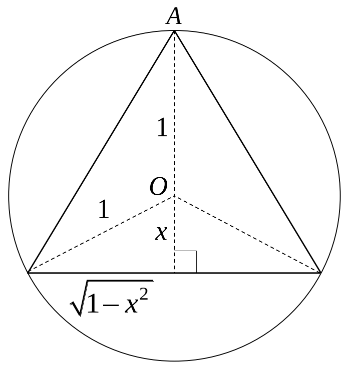
2019 年京大理 $\boxed{5}$ 文 $\boxed{5}$ 共通



正方形$B_1B_2B_3B_4$を含む平面をαとする。αを固定して考える。
四角錐$AB_1B_2B_3B_4$の体積が最大になるのは、Aがαから最も遠いときである。
正方形$B_1B_2B_3B_4$の中心を通りαに垂直な直線と、球面との交点を考える。
この 2 交点のうち、αから遠い側をAと定めればよい。



次に、球面の中心Oからαまでの距離をxとする。
Aおよび正方形$B_1B_2B_3B_4$の 1 つの対角線を含む断面を考えると、
対角線の長さは$2\sqrt{1-x^2}$、1 辺の長さは$\sqrt{2(1-x^2)}$であるから、
正方形$B_1B_2B_3B_4$の面積は$2(1-x^2)$となる。

四角錐$AB_1B_2B_3B_4$の体積の最大値は、高さを$1+x\ (0 \leqq x < 1)$
とすればよいから

$$V = \frac{1}{3}\cdot 2(1-x^2)\cdot(1+x) = \frac{2}{3}(1-x)(1+x)^2$$

$f(x) = \dfrac{2}{3}(1-x)(1+x)^2$として、$0 \leqq x < 1$ における増減を調べる。

$$f'(x) = -\frac{2}{3}(1+x)^2 + \frac{4}{3}(1-x)(1+x) = \frac{2}{3}(1+x)(1-3x)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

増減は右の通りで、$x = \dfrac{1}{3}$において最大となる。

求める最大値は　$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{16}{9} = \dfrac{64}{81}$ $\cdots\cdots$(答)

※2019 年慶應大薬学部[I](7)でほぼ同じ出題あり。球面の半径が違うだけ。