2020年京大文 $\boxed{2}$

求める2次関数を、$y=ax^2+bx+c$とおく。$a\neq 0$である。

$x^2=ax^2+bx+c$とすると　$(a-1)x^2+bx+c=0$ ——①

$a\neq 1$の条件下で、①の相違なる2実数解をα,βとすると、解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a-1}\text{ ——②}\quad \alpha\beta=\frac{c}{a-1}\text{ ——③}$$

$x=\alpha,\beta$において、互いの接線が直交するから

$$2\alpha(2a\alpha+b)=4a\alpha^2+2b\alpha=-1\text{ ——④}\quad 2\beta(2a\beta+b)=4a\beta^2+2b\beta=-1\text{ ——⑤}$$

④－⑤より

$$4a(\alpha^2-\beta^2)+2b(\alpha-\beta)=2(\alpha-\beta)\{2a(\alpha+\beta)+b\}=0$$

$\alpha\neq\beta$のときを考えているので、$2a(\alpha+\beta)+b=0$である。②を代入すると

$$-\frac{2ab}{a-1}+b=0\quad 2ab-b(a-1)=b(a+1)=0$$

したがって、$a=-1$または$b=0$である。

④＋⑤より

$$4a(\alpha^2+\beta^2)+2b(\alpha+\beta)=4a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+2b(\alpha+\beta)=-2$$

$a=-1$のとき、②、③を代入すると

$$-4\left(\frac{b^2}{4}+2\cdot\frac{c}{2}\right)+2b\cdot\frac{b}{2}=-b^2-4c+b^2=-4c=-2\quad \therefore c=\frac{1}{2}$$

$a=-1,c=\dfrac{1}{2}$のとき、①は　$-2x^2+bx+\dfrac{1}{2}=0$　$4x^2-2bx-1=0$

$D/4=b^2+4>$より、①は任意の実数bについて、相違なる2実数解を持つ。

$y=-x^2+bx+\dfrac{1}{2}$は、題意を満たす2次関数である。

同様に、$b=0$のとき、②、③を代入すると

$$-8a\alpha\beta=-\frac{8ac}{a-1}=-2\quad \therefore c=\frac{a-1}{4a}$$

$b=0,c=\dfrac{a-1}{4a}$のとき、①は　$(a-1)\left(x^2+\dfrac{1}{4a}\right)=0$　実数解を持つには、$a<0$が必要である。

$a<0$であるとき、$y=ax^2+\dfrac{a-1}{4a}$は、題意を満たす2次関数である。

以上により、求める2次関数は　$y=-x^2+bx+\dfrac{1}{2},y=ax^2+\dfrac{a-1}{4a}\,(a<0)$ ……(答)