2020年京大理$\boxed{3}$文$\boxed{4}$共通

点A, Bはxy平面上にあり、$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$としても一般性を失わない。

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$より、$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$であるから、
$\overrightarrow{OC}$は$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$と垂直である。$C$は$xz$平面上の点であり、$C(p,0,q)$とおける。

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{\sqrt{3}}{2}p=-\frac{\sqrt{6}}{4}$より　$\therefore p=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$p^2+q^2=1$より　$q^2=1-p^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$　$\therefore q=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$　$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$と定まった。

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$より、同様に、$D(r,0,s)$とおける。

$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$のとき　$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-r+s)=\frac{1}{2}$　$s-r=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$s=r+\frac{\sqrt{2}}{2}$を$s^2+r^2=1$に代入すると　$\left(r+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+r^2=2r^2+\sqrt{2}r+\frac{1}{2}=1$　$4r^2+2\sqrt{2}r-1=0$

$\therefore r=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}$　$\therefore s=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}$

$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$のとき　$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-r-s)=\frac{1}{2}$　$s+r=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$s=-r-\frac{\sqrt{2}}{2}$を$s^2+r^2=1$に代入すると　$\left(r+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+r^2=2r^2+\sqrt{2}r+\frac{1}{2}=1$　$4r^2+2\sqrt{2}r-1=0$

$\therefore r=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}$　$\therefore s=\frac{-\sqrt{2}\mp\sqrt{6}}{4}$

以上により、$D\left(\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}, 0, \frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}\right)$または$D\left(\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}, 0, \frac{-\sqrt{2}\mp\sqrt{6}}{4}\right)$である(複号同順)。

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}=\frac{-\sqrt{6}\pm3\sqrt{2}}{8}$　$k>0$より　$\therefore k=\frac{-\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{8}$ ……(答)