2020 年京大理 $\boxed{4}$

$f(m,n)$が 3 の倍数でなければ、$B\bigl(f(m,n)\bigr)=0$であるから、まず$f(m,n)$が 3 の倍数になる条件を考える。
$(3k)^3=27k^3, (3k\pm1)^3=\bigl(3\text{ の倍数}\bigr)+(\pm1)^3=\bigl(3\text{ の倍数}\bigr)\pm1$より、$m^3\equiv m \pmod{3}$である。

$n=3l-1$のとき　$n^2+n=9l^2-6l+1+3l-1=9l^2-3l=3(3l^2-l)$
$f(m,n)$が 3 の倍数になるには、mが 3 の倍数である必要があり、$m=3k$とおく。
　$f(m,n)=27k^3+3(3l^2-l)+3=3(9k^3+3l^2-l+1)$
さらに、$9k^3+3l^2-l+1$が 3 の倍数になる条件を考えると、$l-1$が 3 の倍数である必要がある。
$1\leqq 3l-1\leqq 30$より$1\leqq l\leqq 10$であり、適するのは　$\therefore l=1,4,7,10$

　$l=1$のとき　$f(m,n)=3(9k^3+3)=3^2(3k^3+1)$　kの値に関わらず、$B\bigl(f(m,n)\bigr)=2$である。
　$l=4$のとき　$f(m,n)=3(9k^3+45)=3^3(k^3+5)$　k^3+5が 3 の倍数になるのは、$k=3a+1$のとき。
　$1\leqq 3k\leqq 30$より$1\leqq k\leqq 10$であり、適するのは　$\therefore k=1,4,7,10$
　　$k=1$のとき　$f(m,n)=3^3\cdot 6=3^4\cdot 2$　　$k=4$のとき　$f(m,n)=3^3\cdot 69=3^4\cdot 23$
　　$k=7$のとき　$f(m,n)=3^3\cdot 348=3^4\cdot 116$　　$k=10$のとき　$f(m,n)=3^3\cdot 1005=3^4\cdot 335$
　いずれの場合も、$B\bigl(f(m,n)\bigr)=4$である。
　$l=7$のとき　$f(m,n)=3(9k^3+141)=3^2(3k^3+47)$　kの値に関わらず、$B\bigl(f(m,n)\bigr)=2$である。
　$l=10$のとき　$f(m,n)=3(9k^3+291)=3^2(3k^3+97)$　kの値に関わらず、$B\bigl(f(m,n)\bigr)=2$である。

$n=3l+1$のとき　$n^2+n=9l^2+6l+1+3l+1=9l^2+9l+2=9(l^2+l)+2$
$f(m,n)$が 3 の倍数になるには、$m=3k+1$である必要がある。
　$f(m,n)=27k^3+27k^2+9k+9(l^2+l)+6=3(9k^3+9k^2+3k+3l^2+3l+2)$
k,lの値に関わらず、$B\bigl(f(m,n)\bigr)=1$である。

以上により　$A(m,n)$の最大値は4 ……(答)
$A(m,n)$の最大値を与える(m,n)は　$(m,n)=(3,11),(12,11),(21,11),(30,11)$ ……(答)