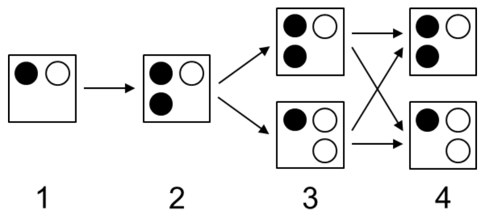
2021 年京大文 $\boxed{3}$

最初に番号 1 の箱から取り出した玉を●で表し、番号 1 の箱に残った玉を○で表す。
番号$k-1$の箱まで操作を終えて、番号kの箱に●が 2 個・○が 1 個入っている確率をa_kとし、番号kの箱に●が 1 個・○が 2 個入っている確率をb_kとする。

$a_2 = 1$ であり、以降$k \geqq 2$ について、以下の漸化式が成り立つ。 $a_{k+1} = \frac{2}{3}a_k + \frac{1}{3}b_k$



$b_k = 1 - a_k$であるから $a_{k+1} = \frac{2}{3}a_k + \frac{1}{3}(1-a_k) = \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3}$

$a_{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(a_k - \frac{1}{2}\right)$ $a_k - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\left(a_2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$

$\therefore a_k = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\right\}$

番号$n-1$ の箱まで操作を終えて、最後に●の玉が番号 1 の箱に戻る確率は、$\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n = a_{n+1}$であるから

求める確率は $\therefore \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$ ……(答)