2022年京大文 $\boxed{3}$

CとL_1, L_2の接点のx座標を、それぞれ(α, β) $(\alpha < \beta)$とする。

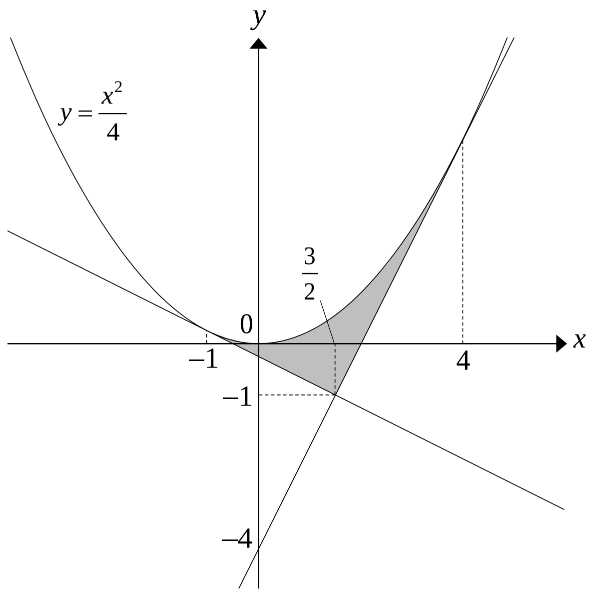
L_1の傾きは$\dfrac{1}{2}\alpha$であり、L_1の式は　$y = \dfrac{1}{2}\alpha(x-\alpha) + \dfrac{1}{4}\alpha^2 = \dfrac{1}{2}\alpha x - \dfrac{1}{4}\alpha^2$ ――①

同様に、L_2の式は　$y = \dfrac{1}{2}\beta x - \dfrac{1}{4}\beta^2$ ――②

①－②より　$\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)x - \dfrac{1}{4}(\alpha^2-\beta^2) = \dfrac{1}{4}(\alpha-\beta)\{2x-(\alpha+\beta)\} = 0$

$\alpha - \beta \neq 0$ より　$\therefore x = \dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{3}{2}$　$\therefore \alpha+\beta = 3$　$\dfrac{1}{2}\alpha \cdot \dfrac{1}{2}\beta = \dfrac{1}{4}\alpha\beta = -1$ より　$\therefore \alpha\beta = -4$

α, βは、二次方程式$x^2-3x-4=0$ の 2 解である。$(x+1)(x-4)=0$ より　$\therefore \alpha = -1, \beta = 4$



L_1, L_2の式は　$y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}, y = 2x - 4$

求める面積は

$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left\{\frac{1}{4}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)\right\} dx + \int_{\frac{3}{2}}^{4} \left\{\frac{1}{4}x^2 - (2\mathrm{x}-4)\right\} dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{\frac{3}{2}} (x+1)^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\frac{3}{2}}^{4} (x-4)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}\left[\frac{(x-4)^3}{3}\right]_{\frac{3}{2}}^{4} = \frac{1}{12}\cdot\frac{125}{8} + \frac{1}{12}\cdot\frac{125}{8}$$

$$= \frac{125}{48} \cdots\cdots (答)$$