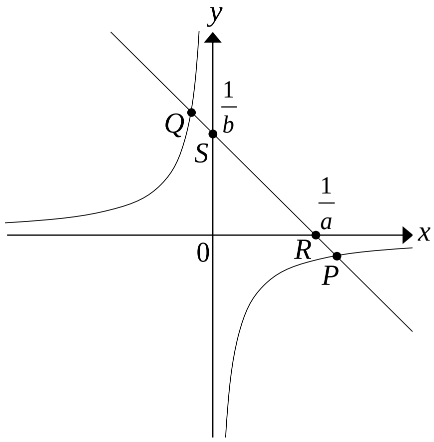
2022年京大文 $\boxed{4}$



$R\left(\dfrac{1}{a},0\right),S\left(0,\dfrac{1}{b}\right)$である。$RS^2=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}$

$ax+by=1$に$y=-\dfrac{1}{x}$を代入して　$ax-\dfrac{b}{x}=1$　$ax^2-x-b=0$ ——①

$D=1+4ab>0$より、①は相違なる2実数解を持つ。
①の2実数解を$p,q(q<p)$とすると、Pのx座標はp、Qのx座標はqである。

解と係数の関係より、$p+q=\dfrac{1}{a},pq=-\dfrac{b}{a}$であるから

$$PQ^2=(p-q)^2+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)^2=\{(p+q)^2-4pq\}\left(1+\frac{1}{p^2q^2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{4b}{a}\right)\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)=\frac{(1+4ab)(a^2+b^2)}{a^2b^2}=(1+4ab)RS^2$$

$$\frac{PQ^2}{RS^2}=1+4ab=2\quad\therefore ab=\frac{1}{4}\text{ ——②}$$

PQの中点を(X,Y)とすると　$X=\dfrac{p+q}{2}=\dfrac{1}{2a}$　$Y=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}\right)=-\dfrac{p+q}{2pq}=\dfrac{1}{2a}\cdot\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2b}$

②より　$XY=\dfrac{1}{4ab}=1$　$a>0$より$X>0$であるから、求める軌跡は　$\therefore y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ ……(答)