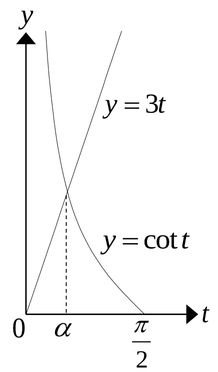
2022年京大理 $\boxed{5}$

(1)

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx=\left[\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\ \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

$$f(t)=OP\cdot OR=t\cos^3 t$$
$$f'(t)=\cos^3 t+t\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)=\cos^2 t\,(\cos t-3t\sin t)$$
$$=\sin t\cos^2 t\,(\cot t-3t)$$



$\cot t=\dfrac{\cos t}{\sin t}=-\dfrac{\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}=-\tan\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)$であり、$y=\cot t$と$y=3t$は

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$においてただ一つの共有点を持つ。これを$t=\alpha$とすると、

$f(t)$の増減は右の通りで、$t=\alpha$のみで最大値を持つ。(証明終)

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

また、$3\alpha=\cot\alpha$であるから

$$\alpha=\frac{\cos\alpha}{3\sin\alpha}\qquad\therefore\ \alpha\cos^3\alpha=f(\alpha)=\frac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}\ (\text{証明終})$$

(3)

$\dfrac{f(\alpha)}{S}=\dfrac{\cos^4\alpha}{2\sin\alpha}=\dfrac{(1-\sin^2\alpha)^2}{2\sin\alpha}$である。関数$g(s)=\dfrac{(1-s^2)^2}{2s}\,(0<s<1)$を考える。

$$g'(s)=\frac{2(1-s^2)(-2s)\cdot s-(1-s^2)^2\cdot 1}{2s^2}=-\frac{(1-s^2)\{4s^2+(1-s^2)\}}{2s^2}=-\frac{(1-s^2)(3s^2+1)}{2s^2}<0$$

$g(s)$は$0<s<1$において単調減少であるから、$\dfrac{f(\alpha)}{S}$は$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$において単調減少である。

ここで　$\cot\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$　$3\cdot\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$　$1.7<\sqrt{3}$、$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{3.2}{2}=1.6$ より　$\cot\dfrac{\pi}{6}-3\cdot\dfrac{\pi}{6}>0$

$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)>0=f(\alpha)$であるから　$\dfrac{\pi}{6}<\alpha$　$\therefore\dfrac{f(\alpha)}{S}<\dfrac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{S}=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(1-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{9}{16}$ (証明終)

※円周率πの近似値は、既知としてよいのか？