2023 年京大理 $\boxed{1}$

問 1

$t=\sqrt{x}$とすると　$t^2=x$　$dx=2tdt$

$$\int_1^4 \sqrt{x}\log(x^2)\,dx = 2\int_1^4 \sqrt{x}\log x\,dx = 2\int_1^2 t\log(t^2)\cdot 2tdt = 8\int_1^2 t^2\log t\,dt = \frac{8}{3}\int_1^2 (t^3)'\log t\,dt$$

$$= \frac{8}{3}[t^3\log t]_1^2 - \frac{8}{3}\int_1^2 t^3\cdot\frac{1}{t}dt = \frac{64}{3}\log 2 - \frac{8}{3}\int_1^2 t^2dt = \frac{64}{3}\log 2 - \frac{8}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{64}{3}\log 2 - \frac{8}{3}\left(\frac{8-1}{3}\right) = \frac{64}{3}\log 2 - \frac{56}{9}$$ ……(答)

問 2

$$x^{2023}-1=(x^5)^{404}\cdot x^3-1=(x^5)^{404}\cdot x^3-x^3+x^3-1=x^3\{(x^5)^{404}-1\}+x^3-1$$

$$=x^3(x^5-1)\{(x^5)^{403}+(x^5)^{402}+\cdots+(x^5)^2+x^5+1\}+x^3-1$$

$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$であるから、$x^3\{(x^5)^{404}-1\}$は$x^4+x^3+x^2+x+1$で割り切れる。
したがって、$x^{2023}-1$を$x^4+x^3+x^2+x+1$で割った余りは　$\therefore x^3-1$ ……(答)