

2024 年京大文 [1]

空間座標系において、 $O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C(x,y,h)$ とする。ただし、 $h > 0$ とする。

$\angle COA = \angle COB$ より、 $\cos \angle COA = \cos \angle COB$ であるから

$$\cos \angle COA = \frac{OA^2 + OC^2 - AC^2}{2OA \cdot OC} = \frac{1 + 1 - (x-1)^2 - y^2 - h^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{2 - (x-1)^2 - y^2 - h^2}{2}$$

$$\cos \angle COB = \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2OB \cdot OC} = \frac{1 + 1 - x^2 - (y-1)^2 - h^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{2 - x^2 - (y-1)^2 - h^2}{2}$$

$$\cos \angle COA = \cos \angle COB \text{ のとき } (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \quad 2x = 2y \quad \therefore x = y$$

$$C(x, x, h) \text{ とおけるから } CA^2 = CB^2 = x^2 + (x-1)^2 + h^2 = 2x^2 + h^2 - 2x + 1$$

$$OC^2 = 2x^2 + h^2 = 1 \text{ より } \therefore CA^2 = CB^2 = 2 - 2x$$

$$AB = \sqrt{2} \text{ より } \cos \angle ACB = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA \cdot CB} = \frac{2 - 2x + 2 - 2x - 2}{2(2 - 2x)} = \frac{1 - 2x}{2 - 2x}$$

$$\cos \angle COA = \cos \angle COB = \frac{2 - x^2 - (x-1)^2 - h^2}{2} = \frac{2 - (2x^2 + h^2 - 2x + 1)}{2} = \frac{2 - (2 - 2x)}{2} = x \text{ より}$$

$$x = \frac{1 - 2x}{2 - 2x} \quad 2x - 2x^2 = 1 - 2x \quad 2x^2 - 4x + 1 = 0 \quad 0 < x < 1 \text{ より } \therefore x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

$$h^2 = 1 - 2 \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1 - \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} - 2 \quad \therefore h = \sqrt{2\sqrt{2} - 2}$$

$$\triangle OAB \text{ を底面と考えて、求める体積は } \therefore \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\sqrt{2} - 2} = \frac{1}{6} \sqrt{2\sqrt{2} - 2} \dots\dots (\text{答})$$