

2024 年京大文 4

条件を満たす自然数 a の、十進法における桁数を n とすると、以下が成り立つ。

$$10^{n-1} \leq a < 10^n \text{ ---①} \quad 9^{n-1} \leq a < 9^n \text{ ---②} \quad 8^{n-1} \leq a < 8^n \text{ ---③}$$

$$\text{①} \sim \text{③} \text{の共通範囲は } 10^{n-1} \leq a < 8^n \text{ ---④}$$

④を満たす自然数 a が存在する条件は $10^{n-1} < 8^n$ 両辺の自然対数をとると

$$n - 1 < 3n \log_{10} 2 \quad (1 - 3 \log_{10} 2)n < 1 \quad n < \frac{1}{1 - 3 \log_{10} 2} \text{ ---⑤}$$

$$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011 \text{ より } 0.903 < 3 \log_{10} 2 < 0.9033 \quad 0.0967 < 1 - 3 \log_{10} 2 < 0.097$$

$$\frac{1}{0.0967} = 10.34 \dots \quad \frac{1}{0.097} = 10.30 \dots$$

⑤を満たす最大の自然数 n は $\therefore n = 10$

これを④に代入すると、求める自然数 a は、 $10^9 \leq a < 8^{10}$ を満たす最大値であるから

$$\therefore 8^{10} - 1 = 2^{30} - 1 = 1073741823 \dots \dots \text{(答)}$$