2024年京大理$\boxed{1}$

(1)
ちょうど3色で塗り分けるか、ちょうど4色で塗り分けるか、いずれかである。

ちょうど3色で塗り分けるとき、立方体の3組の対面に同じ色が塗られる。
4色中3色の選び方が${}_4C_3 = 4$通り。3色の3組の対面への割り当て方が$3! = 6$通り。
ちょうど3色で塗り分ける塗り方は、$4 \times 6 = 24$通り。

ちょうど4色で塗り分けるとき、立方体の3組の対面のうち2組に同じ色が塗られ、残り1組に異なる色が塗られる。同じ色に塗られる2組の対面の選び方が${}_3C_2 = 3$通り。
それら2組の対面への、2色の割り当て方が$2 \times {}_4C_2 = 12$通り。
残り2面の塗り方が2通り。
ちょうど4色で塗り分ける塗り方は、$3 \times 12 \times 2 = 72$通り。

条件を満たす塗り方の総数は、$12 + 72 = 96$通り。すべての塗り方の総数は、4^6通りであるから、
求める確率は　$\therefore p_4 = \dfrac{96}{4^6} = \dfrac{6}{4^4} = \dfrac{3}{128}$ ……(答)

(2)
nは十分に大きいと考える。
立方体の6面を、ちょうど3色、4色、5色で塗り分ける塗り方の総数を、$a_3,\ a_4,\ a_5$とする。
$a_3 = 24,\ a_4 = 72,\ a_5$は、定数である。
立方体の6面とも異なる色で塗られる確率は

$$\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}\cdot\frac{n-4}{n}\cdot\frac{n-5}{n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{4}{n}\right)\left(1-\frac{5}{n}\right)$$

$$\therefore p_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{4}{n}\right)\left(1-\frac{5}{n}\right) + \frac{{}_nC_3}{n^6}a_3 + \frac{{}_nC_4}{n^6}a_4 + \frac{{}_nC_5}{n^6}a_5$$

${}_nC_3,\ {}_nC_4,\ {}_nC_5$は、それぞれ$n$に関する3次式、4次式、5次式であるから

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{{}_nC_3}{n^6} = \lim_{n\to\infty}\frac{{}_nC_4}{n^6} = \lim_{n\to\infty}\frac{{}_nC_5}{n^6} = 0$$

以上により　$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = 1$ ……(答)

※(1)は文系$\boxed{2}$の(2)と共通。