

2024 年京大理 [2]

$y = 3 \cos \theta + 8 + i(3 \sin \theta + 6)$ とおける。 $z = \frac{x+y}{2}$ より $x = 2z - y$ であるから

$$|x| = |2z - y| \leq 2 \quad \left| z - \frac{y}{2} \right| = \left| z - \left(\frac{3}{2} \cos \theta + 4 + i \left(\frac{3}{2} \sin \theta + 3 \right) \right) \right| \leq 1$$

θ を固定すると、 z は $\frac{3}{2} \cos \theta + 4 + i \left(\frac{3}{2} \sin \theta + 3 \right)$ を中心とした半径 1 の円の周および内部を動く。

$w = \frac{3}{2} \cos \theta + 4 + i \left(\frac{3}{2} \sin \theta + 3 \right)$ とする。 θ を変化させると、 w は円 $|w - (4 + 3i)| = \frac{3}{2}$ の周を動く。

半径 1 の円の中心を、円 $|w - (4 + 3i)| = \frac{3}{2}$ の周に沿って動かすと、 z が動く範囲は右図の通り。境界線を含む。

これは外径 $\frac{5}{2}$ 、内径 $\frac{1}{2}$ のドーナツ形であるから、

面積は $\pi \cdot \frac{25}{4} - \pi \cdot \frac{1}{4} = 6\pi \dots\dots$ (答)

