2024年京大理$\boxed{3}$

4点O,A,B,Cのうちどの3点も一直線上にはなく、4点O,A,B,Cは四面体をなしている。

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$である。

$\overrightarrow{BY}=y\overrightarrow{BC}$より　$\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OB}=y\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)$　$\therefore\overrightarrow{OY}=(1-y)\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$

直線QYと直線PXがねじれの位置にない条件を考える。このとき、4点P,X,Q,Yは同一平面上にある。
すなわち、$\overrightarrow{PY}=s\overrightarrow{PQ}+t\overrightarrow{PX}$となるような実数$s,t$が存在する。

$$\overrightarrow{PY}=\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+(1-y)\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}\text{ ―― ①}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\quad\overrightarrow{PX}=\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OC}$$

$$\therefore s\overrightarrow{PQ}+t\overrightarrow{PX}=-\frac{1}{2}t\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}s\overrightarrow{OB}+tx\overrightarrow{OC}\text{ ―― ②}$$

$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$は一次独立である。ベクトルの一意性により、直線$QY$と直線$PX$がねじれの位置にない条件は

$$1=t,1-y=\frac{1}{2}s,y=tx\quad\therefore s=2-2y,t=1,x=y$$

実数s,tについて$\overrightarrow{PY}\neq s\overrightarrow{PQ}+t\overrightarrow{PX}$となるためには、$x\neq y$である必要がある。
逆に$x\neq y$であるとき、実数s,tについて$\overrightarrow{PY}\neq s\overrightarrow{PQ}+t\overrightarrow{PX}$となる。

求める必要十分条件は　$\therefore x\neq y\cdots\cdots$(答)