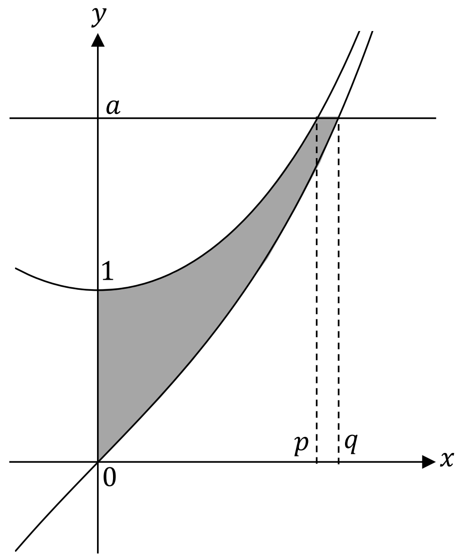
2024年京大理$\boxed{5}$

(1)



曲線$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}, y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$と、直線$y=a$との

$x \geqq 0$における交点のx座標を、それぞれp, qとする。

$\dfrac{e^p+e^{-p}}{2}=a$より　$(e^p)^2-2ae^p+1=0$　$e^p=a\pm\sqrt{a^2-1}$

$a-\sqrt{a^2-1}=\dfrac{1}{a+\sqrt{a^2-1}} \leqq 1$であり、$p \geqq 0$より

$\therefore p=\log\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)$

$\dfrac{e^q-e^{-q}}{2}=a$より　$(e^q)^2-2ae^q-1=0$

$e^q>0$より　$e^q=a+\sqrt{a^2+1}$　$\therefore q=\log\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$

$$
\begin{aligned}
S_a&=\int_0^p \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx+a(q-p)-\int_0^q \frac{e^x-e^{-x}}{2}dx=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^p-\left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]_0^q+a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\\
&=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-1}-\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)-\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+1}+\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}-2\right)+a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\\
&=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-1}-a+\sqrt{a^2-1}\right)-\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+1}-a+\sqrt{a^2+1}-2\right)+a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\\
&=1+\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2+1}+a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\ \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

(2)

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\left(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}\right)=\lim_{a\to\infty}\frac{2}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}=0$である。$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\left(a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$を考える。

$$a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}=\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^a$$

$$\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}=1+\frac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}=1+\frac{2}{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}\right)}$$

$f(a)=\dfrac{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}\right)}{2}$とすると　$\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^a=\left\{\left(1+\dfrac{1}{f(a)}\right)^{f(a)}\right\}^{\frac{a}{f(a)}}$

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}f(a)=\infty$であるから　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(a)}\right)^{f(a)}=e$　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{a}{f(a)}=\lim_{a\to\infty}\frac{2}{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\right)\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}\right)}=0$

これより　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\left(a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)=\log e^0=\log 1=0$　$\displaystyle\therefore \lim_{a\to\infty}S_a=1$ $\cdots\cdots$(答)