2024年京大理$\boxed{6}$

$a_k=2^{\sqrt{k}}$の整数部分が、n桁であるとき　$10^{n-1} \leqq 2^{\sqrt{k}} < 10^n$　各辺の常用対数をとると

$$n-1 \leqq \sqrt{k}\log_{10}2 < n \quad \frac{n-1}{\log_{10}2} \leqq \sqrt{k} < \frac{n}{\log_{10}2} \quad \therefore \frac{(n-1)^2}{(\log_{10}2)^2} \leqq k < \frac{n^2}{(\log_{10}2)^2} \text{ ——①}$$

①を満たす自然数kの範囲は、ガウス記号を用いると

$$\left[\frac{(n-1)^2}{(\log_{10}2)^2}\right]+1 \leqq k \leqq \left[\frac{n^2}{(\log_{10}2)^2}\right] \quad \therefore N_n = \left[\frac{n^2}{(\log_{10}2)^2}\right]-\left[\frac{(n-1)^2}{(\log_{10}2)^2}\right]$$

実数xについて、$x-1<[x] \leqq x$であるから、以下の不等式が成立する。

$$\frac{n^2}{(\log_{10}2)^2}-1-\frac{(n-1)^2}{(\log_{10}2)^2} \leqq N_n \leqq \frac{n^2}{(\log_{10}2)^2}-\frac{(n-1)^2}{(\log_{10}2)^2}+1 \text{ ——②}$$

$a_k=2^{\sqrt{k}}$の整数部分が、n桁かつ最高位の数が1であるとき　$1 \times 10^{n-1} \leqq 2^{\sqrt{k}} < 2 \times 10^{n-1}$
各辺の常用対数をとると

$$n-1 \leqq \sqrt{k}\log_{10}2 < n-1+\log_{10}2 \quad \frac{n-1}{\log_{10}2} \leqq \sqrt{k} < \frac{n-1+\log_{10}2}{\log_{10}2}$$

$$\therefore \frac{(n-1)^2}{(\log_{10}2)^2} \leqq k < \frac{(n-1+\log_{10}2)^2}{(\log_{10}2)^2} \text{ ——③}$$

③を満たす自然数kの範囲は、ガウス記号を用いると

$$\left[\frac{(n-1)^2}{(\log_{10}2)^2}\right]+1 \leqq k \leqq \left[\frac{(n-1+\log_{10}2)^2}{(\log_{10}2)^2}\right] \quad \therefore L_n = \left[\frac{(n-1+\log_{10}2)^2}{(\log_{10}2)^2}\right]-\left[\frac{(n-1)^2}{(\log_{10}2)^2}\right]$$

同様に、ガウス記号の定義により、以下の不等式が成立する。

$$\frac{(n-1+\log_{10}2)^2}{(\log_{10}2)^2}-1-\frac{(n-1)^2}{(\log_{10}2)^2} \leqq L_n \leqq \frac{(n-1+\log_{10}2)^2}{(\log_{10}2)^2}-\frac{(n-1)^2}{(\log_{10}2)^2}+1 \text{ ——④}$$

③、④より

$$\frac{\frac{(n-1+\log_{10}2)^2}{(\log_{10}2)^2}-1-\frac{(n-1)^2}{(\log_{10}2)^2}}{\frac{n^2}{(\log_{10}2)^2}-\frac{(n-1)^2}{(\log_{10}2)^2}+1} \leqq \frac{L_n}{N_n} \leqq \frac{\frac{(n-1+\log_{10}2)^2}{(\log_{10}2)^2}-\frac{(n-1)^2}{(\log_{10}2)^2}+1}{\frac{n^2}{(\log_{10}2)^2}-1-\frac{(n-1)^2}{(\log_{10}2)^2}}$$

$$\frac{(n-1+\log_{10}2)^2-(n-1)^2-(\log_{10}2)^2}{n^2-(n-1)^2+(\log_{10}2)^2} \leqq \frac{L_n}{N_n} \leqq \frac{(n-1+\log_{10}2)^2-(n-1)^2+(\log_{10}2)^2}{n^2-(n-1)^2-(\log_{10}2)^2}$$

$$\frac{2(n-1)\log_{10}2}{2n-1+(\log_{10}2)^2} \leqq \frac{L_n}{N_n} \leqq \frac{2(n-1)\log_{10}2+2(\log_{10}2)^2}{2n-1-(\log_{10}2)^2}$$

$$\therefore \frac{2\left(1-\frac{1}{n}\right)\log_{10}2}{2-\frac{1}{n}+\frac{(\log_{10}2)^2}{n}} \leqq \frac{L_n}{N_n} \leqq \frac{2\left(1-\frac{1}{n}\right)\log_{10}2+\frac{2(\log_{10}2)^2}{n}}{2-\frac{1}{n}-\frac{(\log_{10}2)^2}{n}}$$

はさみうちの原理により　$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{N_n}=\log_{10}2$ ……(答)