2024 年京大文 $\boxed{4}$

(1)

C_1の方程式は　$x \geqq 0$ のとき$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$　$x \leqq 0$ のとき$y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$

$t < 0$ のとき　C_1上の点$(t, t^2 + 2t)$における接線の方程式は

$y = (2t+2)(x-t) + t^2 + 2t = (2t+2)x - t^2$

これがC_2にも接するとき　$x^2 - 5x + \frac{7}{4} = (2t+2)x - t^2$　$x^2 - (2t+7)x + t^2 + \frac{7}{4} = 0$ が重解を持つから

$D = (2t+7)^2 - (4t^2+7) = 28t + 42 = 0$　$\therefore t = -\frac{3}{2}$

$t > 0$ のとき　C_1上の点$(t, t^2 - 2t)$における接線の方程式は

$y = (2t-2)(x-t) + t^2 - 2t = (2t-2)x - t^2$

これがC_2にも接するとき　$x^2 - 5x + \frac{7}{4} = (2t-2)x - t^2$　$x^2 - (2t+3)x + t^2 + \frac{7}{4} = 0$ が重解を持つから

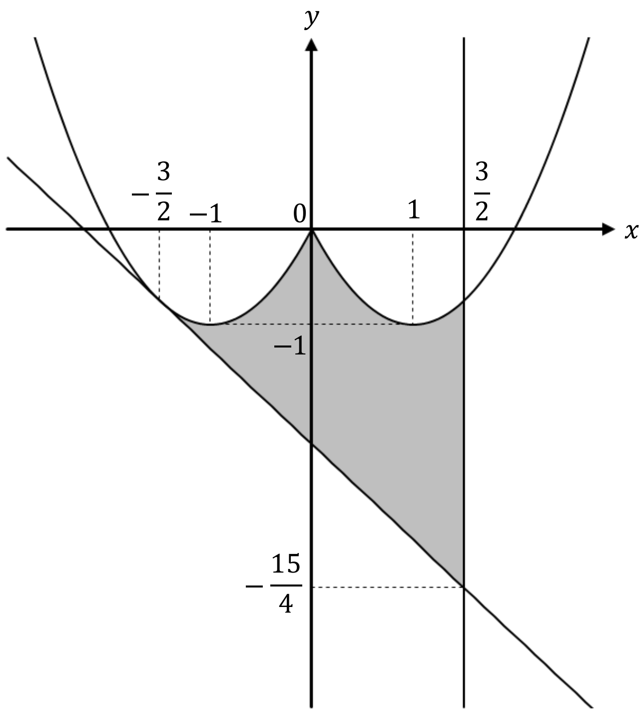
$D = (2t+3)^2 - (4t^2+7) = 12t + 2 = 0$　$\therefore t = -\frac{1}{6}$　$t > 0$ を満たさないから不適。

以上により、題意を満たす直線l_2はただ一つ存在する。　(証明終)

(2)

l_2の方程式は　$y = -x - \frac{9}{4}$

C_1, l_1, l_2で囲まれた領域を図示すると、右図の通り。



対称性に着目して、求める面積は

$$2\int_0^{\frac{3}{2}} \left(x^2 - 2x + \frac{15}{4}\right) dx - \frac{1}{2} \cdot 3^2$$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{15}{4}x\right]_0^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{2}$$

$$= 2\left(\frac{9}{8} - \frac{9}{4} + \frac{45}{8}\right) - \frac{9}{2} = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$ ……(答)