2025 年京大理 1

問 1

$$\left|z-\frac{i}{z}\right|=\left|\frac{z^2-i}{z}\right|=\frac{|z^2-i|}{|z|}=\frac{|z^2-i|}{2}$$

$z=2e^{i\theta}$ と表せるから　$z^2=4e^{i2\theta}=4(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$　$z^2-i=4\cos 2\theta+i(4\sin 2\theta-1)$

$$|z^2-i|^2=16\cos^2 2\theta+(4\sin 2\theta-1)^2=16-8\sin 2\theta+1=17-8\sin 2\theta$$

これより、$|z^2-i|^2$の最大値は $17+8=25$、最小値は $17-8=9$ であるから

$\left|z-\dfrac{i}{z}\right|$ の最大値は$\dfrac{5}{2}$、最小値は$\dfrac{3}{2}$ ……(答)

問 2

(1)

$$\frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{2x^3+1}{x^2+1}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2x-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}$$

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2x-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx+\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2x-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\left[\sqrt{x^2+1}+x^2-\log(x^2+1)\right]_0^{\sqrt{3}}=2+3-\log 4-1=4-2\log 2$$

$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

x	$0\to\sqrt{3}$
θ	$0\to\dfrac{\pi}{3}$

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=[\theta]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$$

以上により　$\therefore\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}dx=4-2\log 2+\frac{\pi}{3}$ ……(答)

(2)

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{1+\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)}=\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx=\left[-2\log\left(\cos\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-2\log\frac{1}{\sqrt{2}}=2\log\sqrt{2}=\log 2\quad\cdots\cdots(答)$$