2026年京大理 $\boxed{1}$

$$f(x)=\frac{1}{x^2\left(\log\frac{a}{x}\right)^2}=\frac{1}{x^2(\log a-\log x)^2}$$

$$f'(x)=-\frac{2x(\log a-\log x)^2+x^2\cdot 2(\log a-\log x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^4(\log a-\log x)^4}=-\frac{2(\log a-\log x)-2}{x^3(\log a-\log x)^3}=\frac{2(1-\log a+\log x)}{x^3(\log a-\log x)^3}$$

$g(x)=1-\log a+\log x$ とすると　$g'(x)=\dfrac{1}{x}$

$0<x<1$ の範囲で $g'(x)>0$ であり、$g(x)$ は単調増加。　$g(1)=1-\log a$　$\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=-\infty$

$0<x<1$ の範囲で $g(x)=0$ となるためには　$g(1)=1-\log a=\log\dfrac{e}{a}>0$　$\dfrac{e}{a}>1$　$\therefore 1<a<e$

このとき、$g(x)=0$ とすると　$\log\dfrac{e}{a}+\log x=0$　$\therefore x=\dfrac{a}{e}$

$1<a<e$ のとき、$f(x)$ の増減は右の通りで、$x=\dfrac{a}{e}$ のとき極小となる。

$$f\left(\frac{a}{e}\right)=\frac{1}{\left(\frac{a}{e}\right)^2\left(\log\frac{ae}{a}\right)^2}=\frac{e^2}{a^2}\quad f(1)=\frac{1}{(\log a)^2}$$

$f(x)=\dfrac{1}{(x\log a-x\log x)^2}$ より　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=+\infty$

x	0	$\cdots$	$\frac{a}{e}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

求める (a,k) の集合は　$1<a<e$ かつ $\dfrac{e^2}{a^2}<k<\dfrac{1}{(\log a)^2}$

図示すると右の通りで、境界線を含まない。