1961 年東大文 $\boxed{5}$

$f(x)=\sqrt{1+x^2}$ とすると　$f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$　$f''(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\dfrac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$f''(x)>0$ であるから、$y=f(x)$ のグラフは常に下に凸である。

B は線分 PQ の中点であるから、その y 座標は $\dfrac{\sqrt{1+(a-h)^2}+\sqrt{1+(a+h)^2}}{2}$ である。

l は B と A の y 座標の差であるから

$$l=\frac{\sqrt{1+(a-h)^2}+\sqrt{1+(a+h)^2}}{2}-\sqrt{1+a^2}=\frac{\sqrt{1+(a+h)^2}-\sqrt{1+a^2}}{2}-\frac{\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+(a-h)^2}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1+(a+h)^2-1-a^2}{\sqrt{1+(a+h)^2}+\sqrt{1+a^2}}-\frac{1+a^2-1-(a-h)^2}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+(a-h)^2}}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{h^2+2ah}{\sqrt{1+(a+h)^2}+\sqrt{1+a^2}}+\frac{h^2-2ah}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+(a-h)^2}}\right\}$$

$$\frac{l}{h^2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1+\frac{2a}{h}}{\sqrt{1+(a+h)^2}+\sqrt{1+a^2}}+\frac{1-\frac{2a}{h}}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+(a-h)^2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(a+h)^2}+\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+(a-h)^2}}\right)+\frac{a}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(a+h)^2}+\sqrt{1+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+(a-h)^2}}\right)$$

ここで

$$\frac{a}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(a+h)^2}+\sqrt{1+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+(a-h)^2}}\right)$$

$$=\frac{a}{h}\cdot\frac{\left(\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+(a-h)^2}\right)-\left(\sqrt{1+(a+h)^2}+\sqrt{1+a^2}\right)}{\left(\sqrt{1+(a+h)^2}+\sqrt{1+a^2}\right)\left(\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+(a-h)^2}\right)}=\frac{a}{h}\cdot\frac{\sqrt{1+(a-h)^2}-\sqrt{1+(a+h)^2}}{\left(\sqrt{1+(a+h)^2}+\sqrt{1+a^2}\right)\left(\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+(a-h)^2}\right)}$$

$$=\frac{a}{h}\cdot\frac{1+(a-h)^2-1-(a+h)^2}{\left(\sqrt{1+(a+h)^2}+\sqrt{1+a^2}\right)\left(\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+(a-h)^2}\right)\left(\sqrt{1+(a-h)^2}+\sqrt{1+(a+h)^2}\right)}$$

$$=-\frac{a}{h}\cdot\frac{4ah}{\left(\sqrt{1+(a+h)^2}+\sqrt{1+a^2}\right)\left(\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+(a-h)^2}\right)\left(\sqrt{1+(a-h)^2}+\sqrt{1+(a+h)^2}\right)}$$

$$=-\frac{4a^2}{\left(\sqrt{1+(a+h)^2}+\sqrt{1+a^2}\right)\left(\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+(a-h)^2}\right)\left(\sqrt{1+(a-h)^2}+\sqrt{1+(a+h)^2}\right)}$$

これより

$$\lim_{h\to 0}\frac{l}{h^2}=\frac{1}{2\sqrt{1+a^2}}-\frac{a^2}{2(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(1+a^2)-a^2}{2(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$ ……(答)