1961年東大理 $\boxed{5}$

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^2 + t - 2 \end{cases}$$

$y = (t+2)(t-1)$ より、 $y \leqq 0$ となるのは $-2 \leqq t \leqq 1$ のときで、$-2 \leqq t \leqq 1$ の範囲で考える。

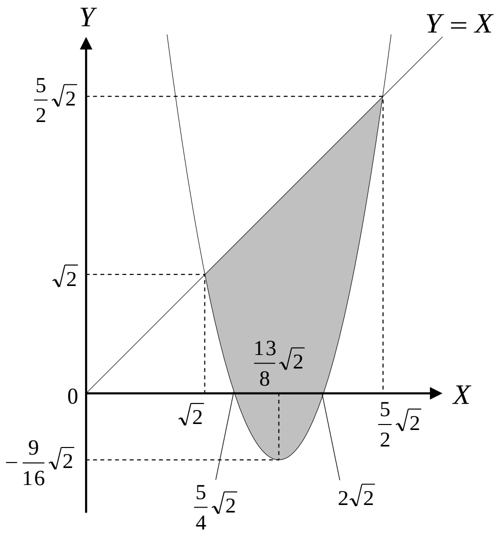
この曲線上の点 (x, y) を原点中心に $45°$ 回転した点 (X, Y) を考える。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 - t \\ 2t^2 + t - 1 \end{pmatrix}$$

$X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(3 - t)$ で、$-2 \leqq t \leqq 1$ より、$\sqrt{2} \leqq X \leqq \dfrac{5}{2}\sqrt{2}$ 　 $t = 3 - \sqrt{2}X$ より

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(2t^2 + t - 1) = \sqrt{2}\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(3 - \sqrt{2}X + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\left(X - \frac{13}{8}\sqrt{2}\right)^2 - \frac{9}{16}\sqrt{2}$$

求める面積は図の網掛け部分に等しい。



$$\int_{\sqrt{2}}^{\frac{5}{2}\sqrt{2}} \left\{ X - 2\sqrt{2}\left(X - \frac{13}{8}\sqrt{2}\right)^2 + \frac{9}{16}\sqrt{2} \right\} dX$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\frac{5}{2}\sqrt{2}} (-2\sqrt{2}X^2 + 14X - 10\sqrt{2}) dX$$

$$= -2\sqrt{2} \int_{\sqrt{2}}^{\frac{5}{2}\sqrt{2}} \left(X - \sqrt{2}\right)\left(X - \frac{5}{2}\sqrt{2}\right) dX$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \frac{\left(\frac{5}{2}\sqrt{2} - \sqrt{2}\right)^3}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^3$$

$$= \frac{9}{2}$$ ……(答)