1961 年東大理 $\boxed{6}$　※2019. 10. 2 訂正

(1)

$f(x) = a\sin x + b\cos x + c\sin 2x \qquad f'(x) = a\cos x - b\sin x + 2c\cos 2x$

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ より　$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = (a-b)\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0 \qquad \therefore a = b$

$f(x)\cos x = a\sin x\cos x + a\cos^2 x + c\sin 2x\cos x = \dfrac{a}{2}\sin 2x + \dfrac{a}{2}(1+\cos 2x) + 2c\sin x\cos^2 x$ より

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx = \left[-\frac{a}{4}\cos 2x + \frac{a}{2}x + \frac{a}{4}\sin 2x - \frac{2}{3}c\cos^3 x\right]_0^{2\pi} = a\pi = 5\pi \qquad \therefore a = 5$$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 6\sqrt{2}$ より　$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{2}}a + c = \sqrt{2}a + c = 6\sqrt{2} \qquad \therefore c = \sqrt{2}(6-a) = \sqrt{2}$

以上により　$\therefore a = b = 5,\ c = \sqrt{2}$　……(答)

(2)

$f'(x) = 5(\cos x - \sin x) + 2\sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = (\cos x - \sin x)\left\{5 + 2\sqrt{2}(\cos x + \sin x)\right\}$

$5 + 2\sqrt{2}(\cos x + \sin x) = 5 + 4\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) > 0$ であるから、$f'(x) = 0$ のとき

$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \qquad \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減は、右の通り。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{5}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f(x)$ は、$x = \dfrac{5}{4}\pi$ において最小値 $-4\sqrt{2}$ をとる。……(答)

なお、確かに $x = \dfrac{\pi}{4}$ において最大値 $6\sqrt{2}$ をとる。