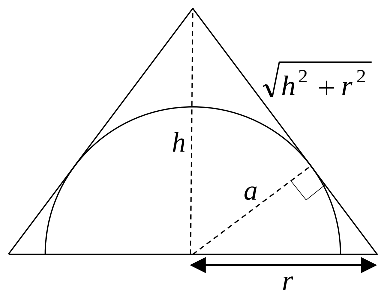
1961 年東大理 $\boxed{3}$ 文 $\boxed{3}$ 共通

直円錐の頂点および底面の中心を通る断面を考える。

このとき、直円錐の母線は、半円に接している。

直円錐の高さを $h(>a)$ 、底面の半径を r とすると、母線の長さは

$\sqrt{h^2+r^2}$ である。直角三角形の相似性より



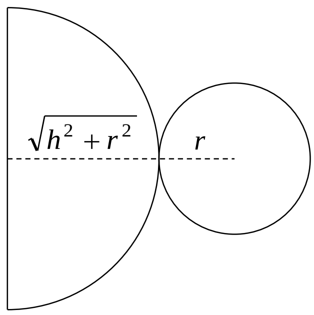
$$r:a=\sqrt{h^2+r^2}:h \quad hr=a\sqrt{h^2+r^2} \quad h^2r^2=a^2(h^2+r^2)$$

$$(h^2-a^2)r^2=a^2h^2 \quad \therefore r^2=\frac{a^2h^2}{h^2-a^2} \quad \therefore h^2+r^2=\frac{h^2(h^2-a^2)+a^2h^2}{h^2-a^2}=\frac{h^4}{h^2-a^2}$$

この直円錐の、底面の円の面積は　$\pi r^2=\dfrac{\pi a^2h^2}{h^2-a^2}$

側面を展開した扇形の半径は、$\sqrt{h^2+r^2}=\dfrac{h^2}{\sqrt{h^2-a^2}}$ であり、

弧の長さは底面の円周の長さに等しいから



側面を展開した扇形の面積は

$$\pi(h^2+r^2)\times\frac{2\pi r}{2\pi\sqrt{h^2+r^2}}=\pi r\sqrt{h^2+r^2}=\frac{\pi a h^3}{h^2-a^2}$$

全表面積は　$S=\pi\cdot\dfrac{ah^3+a^2h^2}{h^2-a^2}=\pi\cdot\dfrac{ah^2(h+a)}{h^2-a^2}=\dfrac{\pi a h^2}{h-a}=\pi a\left(h+a+\dfrac{a^2}{h-a}\right)=\pi a\left\{2a+(h-a)+\dfrac{a^2}{h-a}\right\}$

ここで、相加平均・相乗平均の関係より　$(h-a)+\dfrac{a^2}{h-a}\geqq 2\sqrt{(h-a)\cdot\dfrac{a^2}{h-a}}=2a$

等号成立は、$h-a=\dfrac{a^2}{h-a}$ のとき。　$(h-a)^2=a^2$　$h-a=a$　$\therefore h=2a$

以上により、S を最小にする h は　$\therefore h=2a$　……(答)

※微分法で求めてもよい。