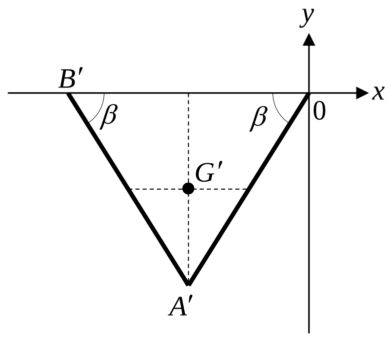
1962年東大理 $\boxed{3}$

右図のように、xy 平面上の x 軸の負の部分に、動点 B' をとる。
$OA'=A'B'=l$ であるように、A' をちょうつがいとして 2 本の棒が連結され、O は原点に固定されている。
今、$\angle B'OA'=\beta\left(0\leqq\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると、折れ線 $OA'B'$ の重心 G' の座標は、
$\left(-l\cos\beta,\ -\dfrac{1}{2}l\sin\beta\right)$ で与えられる。



$A',\ B',\ G'$ を原点中心に角 α 回転した点が、$A,\ B,\ G$ である。

$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$ のとき　α は鋭角であるから　$\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{5}$　$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$　$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

G の座標は　$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-l\cos\beta\\ -\dfrac{1}{2}l\sin\beta\end{pmatrix}=-\dfrac{l}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \dfrac{1}{2}\sin\beta\end{pmatrix}=-\dfrac{l}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\cos\beta-\dfrac{1}{2}\sin\beta\\ \cos\beta+\sin\beta\end{pmatrix}$

G の y 座標は、$y=-\dfrac{l}{\sqrt{5}}(\cos\beta+\sin\beta)=-\sqrt{\dfrac{2}{5}}l\sin\left(\beta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ であり、これが最小になるのは、

$\beta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ のときで、$\beta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき。

このときの、OA と x 軸がなす角 θ は、$\theta=\alpha+\dfrac{\pi}{4}$ であるから、求める $\tan\theta$ は

$$\tan\theta=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}\cdot 1}=3\quad\cdots\cdots(\text{答})$$