1962 年東大理 $\boxed{4}$

$\dfrac{r^{2^{n-1}}}{1-r^{2^n}}=\dfrac{1}{1-r^{2^{n-1}}}-\dfrac{1}{1-r^{2^n}}$ であるから、$S_n=\dfrac{r}{1-r^2}+\dfrac{r^2}{1-r^4}+\dfrac{r^4}{1-r^8}+\cdots+\dfrac{r^{2^{n-1}}}{1-r^{2^n}}$ とおくと、

$$\therefore S_n=\left(\frac{1}{1-r}-\frac{1}{1-r^2}\right)+\left(\frac{1}{1-r^2}-\frac{1}{1-r^4}\right)+\left(\frac{1}{1-r^4}-\frac{1}{1-r^8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1-r^{2^{n-1}}}-\frac{1}{1-r^{2^n}}\right)=\frac{1}{1-r}-\frac{1}{1-r^{2^n}}$$

求める無限級数の和は、$\lim_{n\to\infty}S_n$ であるから

$0<|r|<1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{1-r}-1=\dfrac{r}{1-r}$　$1<|r|$ のとき　$\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{1-r}$

求める和は、

$0<|r|<1$ のとき　$\dfrac{r}{1-r}$

$1<|r|$ のとき　$\dfrac{1}{1-r}$　……(答)