1962 年東大理 $\boxed{6}$

(1)

$f(x)=6\sin\dfrac{x}{6}$ とすると　$f'(x)=\cos\dfrac{x}{6}$

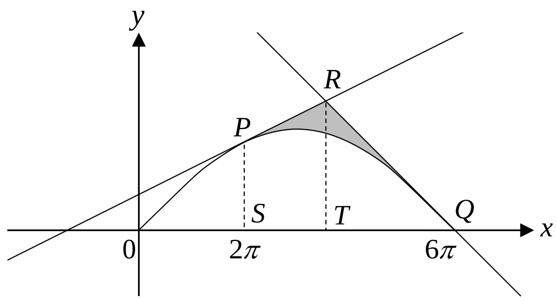
$f(2\pi)=6\sin\dfrac{\pi}{3}=3\sqrt{3},\ f'(2\pi)=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ より、P における接線は　$y=\dfrac{1}{2}(x-2\pi)+3\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}x-\pi+3\sqrt{3}$

$f(6\pi)=6\sin\pi=0,\ f'(6\pi)=\cos\pi=-1$ より、Q における接線は　$y=-(x-6\pi)=-x+6\pi$

これらの交点は　$\dfrac{1}{2}x-\pi+3\sqrt{3}=-x+6\pi$　$\dfrac{3}{2}x=7\pi-3\sqrt{3}$　$\therefore x=\dfrac{14}{3}\pi-2\sqrt{3}$　$\therefore y=\dfrac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}$

R の座標は　$\left(\dfrac{14}{3}\pi-2\sqrt{3},\ \dfrac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}\right)$ ……(答)

(2)



$P,\ R$ から x 軸に下ろした垂線の足を、$S,\ T$ とすると

台形 $PSTR$ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\left(3\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{14}{3}\pi-2\sqrt{3}-2\pi\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\pi+5\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}\right)=\frac{16}{9}\pi^2+\frac{16\sqrt{3}}{3}\pi-15$$

三角形 RTQ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\left(6\pi-\frac{14}{3}\pi+2\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}\right)^2=\frac{8}{9}\pi^2+\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi+6$$

求める面積は

$$\frac{16}{9}\pi^2+\frac{16\sqrt{3}}{3}\pi-15+\frac{8}{9}\pi^2+\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi+6-6\int_{2\pi}^{6\pi}\sin\frac{x}{6}\,dx$$

$$=\frac{8}{3}\pi^2+8\sqrt{3}\pi-9-6\left[-6\cos\frac{x}{6}\right]_{2\pi}^{6\pi}=\frac{8}{3}\pi^2+8\sqrt{3}\pi-9-6(6+3)=\frac{8}{3}\pi^2+8\sqrt{3}\pi-63$$ ……(答)