1963 年東大文 $\boxed{3}$

(1)

$$f(x)=\frac{4x-2}{5-x}=\frac{18-4(5-x)}{5-x}=-4+\frac{18}{5-x} \qquad f(x)-x=-x-4+\frac{18}{5-x}$$

$g(x)=f(x)-x$ とすると　$g'(x)=-1+\dfrac{18}{(5-x)^2}=\dfrac{-(x^2-10x+25)+18}{(5-x)^2}=-\dfrac{x^2-10x+7}{(5-x)^2}$

$x^2-10x+7=0$ を解くと　$x=5\pm3\sqrt{2}$

$g(x)$ の増減は右の通り。

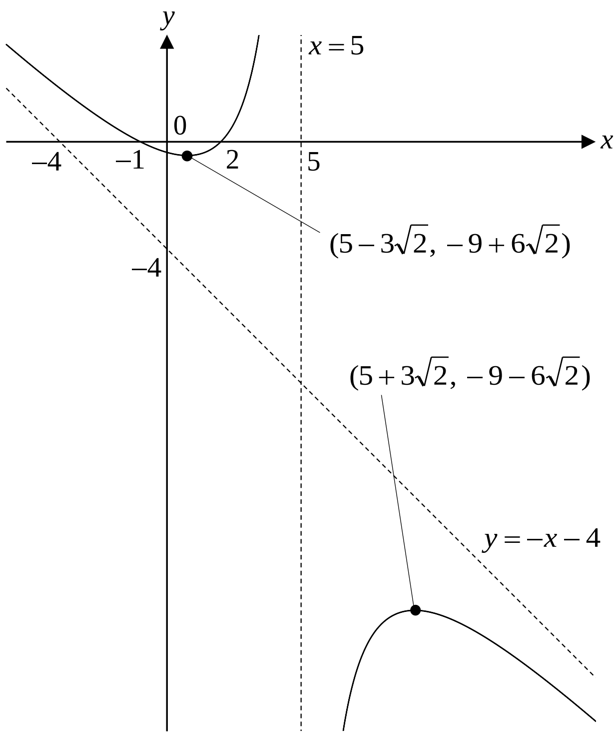
x	$\cdots$	$5-3\sqrt{2}$	$\cdots$	5	$\cdots$	$5+3\sqrt{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$$g(5-3\sqrt{2})=-9+3\sqrt{2}+\frac{18}{3\sqrt{2}}=-9+6\sqrt{2}$$

$$g(5+3\sqrt{2})=-9-3\sqrt{2}-\frac{18}{3\sqrt{2}}=-9-6\sqrt{2}$$

直線 $x=5$ は漸近線であり、$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{18}{5-x}=0$ より、直線 $y=-x-4$ も漸近線である。

$y=g(x)$ のグラフは、右図の通り。



(2)

グラフより

$f(x)-x \leqq -9-6\sqrt{2},\ -9+6\sqrt{2} \leqq f(x)-x$ ……(答)

(3)

$f(x)>x$ のとき、$f(x)-x>0$ であるから、グラフより

$\therefore x<-1,\ 2<x<5$ ……(答)