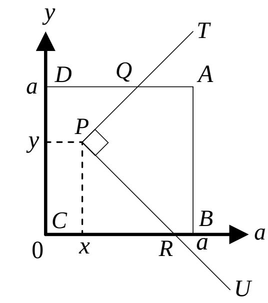
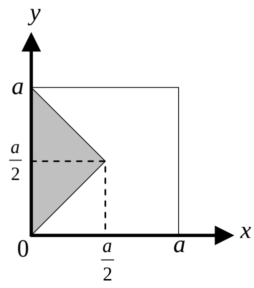
1963 年東大理 $\boxed{5}$

図 i) のように座標を設定し、$P(x, y)$ とし、PU と x 軸の交点を R とする。
Q の座標は $(x-(a-y), a)$ 、R の座標は $(x+y, 0)$ である。



i)

Q が AD と交差するとき　$0 \leqq x-y+a \leqq a \quad \therefore x \leqq y \leqq x+a$ ——①
R が BC と交差するとき　$0 \leqq x+y \leqq a \quad \therefore -x \leqq y \leqq -x+a$ ——②

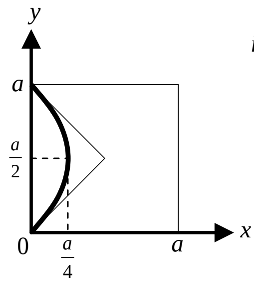


ii)

①、②および $0 \leqq x \leqq a, 0 \leqq y \leqq a$ より、P の存在範囲は図 ii) の網掛部になる。

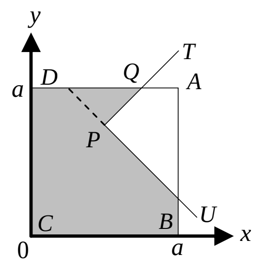
次に、折線 TPU によって正方形 $ABCD$ の面積が二等分されるとき

$$\frac{1}{2}\{x+(x+y)\}y+\frac{1}{2}\{x+(x-y+a)\}(a-y)=\frac{a^2}{2}$$
$$(2x+y)y+(2x-y+a)(a-y)=a^2$$
$$2xy+y^2+2ax-2xy-ay+y^2+a^2-ay=2y^2+2ax-2ay+a^2=a^2$$
$$ax-ay+y^2=0 \quad \therefore x=\frac{1}{a}y(a-y)=-\frac{1}{a}\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a}{4} \ (0 \leqq y \leqq a) \text{——③}$$



iii)

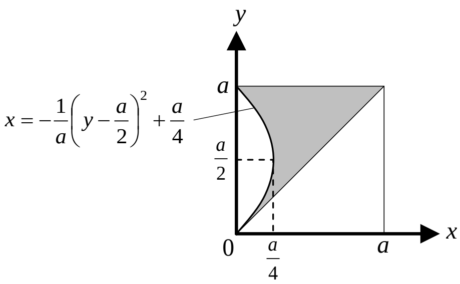
③を図示すると図 iii) 中の太線の通りで、図 ii) の範囲に含まれる。



iv)

また、PU が AB と交わるとき、図 iv) の網掛部には△BCD が含まれ、
面積が半分より大きいのは明らかである。

以上により、③の曲線に沿って P を動かせば、線分 PQ が通過する範囲は
図 v) の網掛部である。この面積は



v)

$$\frac{a^2}{2}-\frac{1}{a}\int_0^a y(a-y)dy=\frac{a^2}{2}-\frac{1}{a}\cdot\frac{a^3}{6}=\frac{a^2}{3} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$