1964 年東大文 $\boxed{5}$

$y=ax^3+bx^2+cx+d$ 上の点 $P(t,\ at^3+bt^2+ct+d)$ における接線の方程式は

$$y=(3at^2+2bt+c)(x-t)+at^3+bt^2+ct+d=(3at^2+2bt+c)x-2at^3-bt^2+d$$

$A(0,\ d),\ Q(0,\ -2at^3-bt^2+d)$ であるから

$$AQ^2=(-2at^3-bt^2)^2=4a^2t^6+4abt^5+b^2t^4$$

$$AP^2=t^2+(at^3+bt^2+ct)^2=t^2+a^2t^6+b^2t^4+c^2t^2+2abt^5+2bct^3+2cat^4$$

$$=a^2t^6+2abt^5+(b^2+2ca)t^4+2bct^3+(c^2+1)t^2$$

$$\frac{AQ^2}{AP^2}=\frac{4a^2t^6+4abt^5+b^2t^4}{a^2t^6+2abt^5+(b^2+2ca)t^4+2bct^3+(c^2+1)t^2}$$

$$=\frac{4a^2t^4+4abt^3+b^2t^2}{a^2t^4+2abt^3+(b^2+2ca)t^2+2bct+(c^2+1)}=\frac{4a^2+\frac{4ab}{t}+\frac{b^2}{t^2}}{a^2+\frac{2ab}{t}+\frac{b^2+2ca}{t^2}+\frac{2bc}{t^3}+\frac{c^2+1}{t^4}}$$

これより、$a\neq 0$ であるから　$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{AQ^2}{AP^2}=0,\ \lim_{t\to +\infty}\frac{AQ^2}{AP^2}=4$ ……(答)