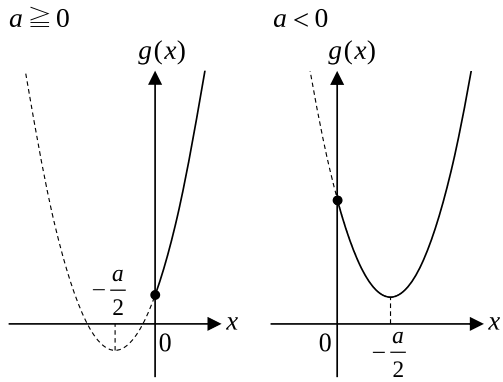
1964年東大理 $\boxed{6}$

条件(1)より　$f(1)=1+a+b=4$　$\therefore b=3-a$

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ であるから、条件(2)より、$x \geqq 0$ のとき $f(x) \geqq 0$ が成立するためには、

$x \geqq 0$ のとき $x^2+ax+b=x^2+ax+3-a \geqq 0$ であればよい。

$g(x)=x^2+ax+3-a=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}a^2-a+3$ とすると



$-\dfrac{a}{2} \leqq 0$　$a \geqq 0$ のとき　$f(0)=3-a \geqq 0$　$\therefore 0 \leqq a \leqq 3$ ——①

$-\dfrac{a}{2}>0$　$a<0$ のとき

$f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}a^2-a+3 \geqq 0$　$a^2+4a-12=(a+6)(a-2) \leqq 0$

$-6 \leqq a \leqq 2$　$\therefore -6 \leqq a < 0$ ——②

①、②より　$\therefore -6 \leqq a \leqq 3$　条件(1)、(2)を満たすとき、$b=3-a$ かつ $-6 \leqq a \leqq 3$ である。

ここで　$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (x^3+ax^2+(3-a)x)dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{a}{3}x^3+\frac{3-a}{2}x^2\right]_0^1=-\frac{1}{6}a+\frac{7}{4}$

$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ は、a に関する1次式で表せるから、

$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ の値を最大にする a, b は $a=-6, b=9$、最小にする a, b は $a=3, b=0$　……(答)