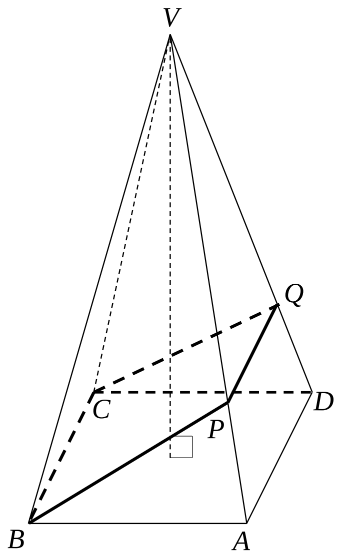
1964年東大理$\boxed{3}$文$\boxed{3}$共通

3点$P,\ B,\ C$を通る平面と、辺VDの交点をQとすると、$PQ \parallel AD$であり、
切り口の四角形$PQCB$は、$PQ \parallel BC$なる台形である。



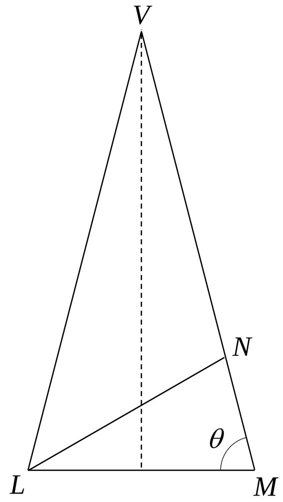
$VP:PA=3:1$より、$VP:VA=3:4$であるから

$$PQ:AD=VP:PA=3:4 \quad 4PQ=3AD \quad \therefore PQ=\frac{3}{4}AD=15$$

また、$BC,\ AD,\ PQ$の中点を、それぞれ$L,\ M,\ N$とする。
4点$V,\ L,\ M,\ N$を通る平面による切り口を考える。
$LM=20,\ VL=VM=40,\ MN=10$であり、LNが台形$PQCB$の高さに等しい。
$\angle LMV=\theta$とすると、$\cos\theta=\dfrac{1}{4}$であるから、余弦定理により

$$LN^2=LM^2+MN^2-2LM\cdot MN\cos\theta=400+100-2\cdot 20\cdot 10\cdot\frac{1}{4}=400$$

$$\therefore LN=20$$



求める面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot(20+15)\cdot 20=350$ ㎠ ……(答)