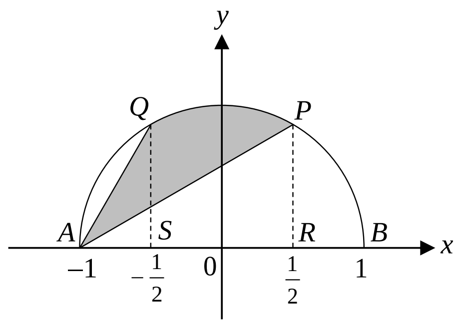
1965 年東大理 $\boxed{6}$

右図のように、半径 1 の半円を、$x^2+y^2=1\,(y \geqq 0)$ とし、

$A(-1,\,0),\ B(1,\,0)$ とすると、$P\left(\dfrac{1}{2},\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ Q\left(-\dfrac{1}{2},\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ となる。



$P,\ Q$ から x 軸に下ろした垂線の足を、$R,\ S$ とすると

$\triangle APR$ を x 軸のまわりに一回転して得られる立体は円錐であり、体積は $\dfrac{1}{3}\cdot\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{8}\pi$

$\triangle AQS$ を x 軸のまわりに一回転して得られる立体は円錐であり、体積は $\dfrac{1}{3}\cdot\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}\pi$

直線 $x=-\dfrac{1}{2},\ x=\dfrac{1}{2}$ 、弧 PQ、 x 軸で囲まれた図形を、 x 軸のまわりに一回転して得られる立体の体積は

$$\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(1-x^2)dx=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)dx=2\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}=2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\right)=\frac{11}{12}\pi$$

求める体積は $\dfrac{11}{12}\pi+\dfrac{1}{8}\pi-\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{2}{3}\pi$ ……(答)