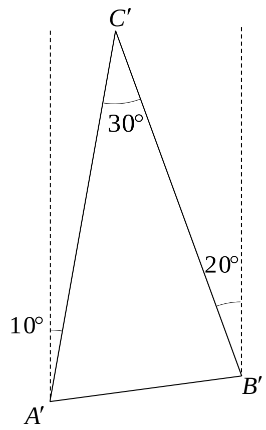
1965年東大理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通

以下、距離・高さの単位は、m(メートル)とする。
山頂 A, B, C から、海抜0mの水平面に降ろした垂線の足を、A', B', C' とする。



C と A の高低差を x とすると、$A'C'=\dfrac{x}{\tan 15^\circ}$

$$\tan 15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\frac{1}{\tan 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}=2+\sqrt{3}\qquad \therefore A'C'=(2+\sqrt{3})x$$

C と B の高低差は $x+390$ であるから、$B'C'=\dfrac{x+390}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}(x+390)$

$\angle A'C'B'=30^\circ$ であるから、余弦定理より

$$A'B'^2=A'C'^2+B'C'^2-2A'C'\cdot B'C'\cdot\cos 30^\circ$$
$$=(7+4\sqrt{3})x^2+3(x^2+780x+390^2)-3(2+\sqrt{3})(x^2+390x)=(4+\sqrt{3})x^2-1170\sqrt{3}x+3\cdot 390^2$$

一方、A と B の高低差は390であるから　$A'B'=\dfrac{390}{\tan 30^\circ}=390\sqrt{3}$

$$(4+\sqrt{3})x^2-1170\sqrt{3}x+3\cdot 390^2=3\cdot 390^2\qquad (4+\sqrt{3})x^2-1170\sqrt{3}x=x\left\{(4+\sqrt{3})x-1170\sqrt{3}\right\}=0$$

$$x=\frac{1170\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}=\frac{1170\sqrt{3}(4-\sqrt{3})}{13}=90\sqrt{3}(4-\sqrt{3})=360\sqrt{3}-270$$

$\sqrt{3}=1.732$ として　$x=360\times 1.732-270=623.52-270=353.52$

1m未満は四捨五入して、求める C の高さは　$1600+354=1954$ m ……(答)