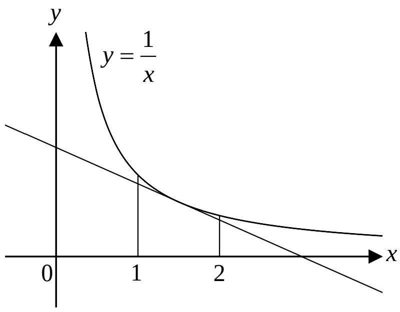
1965 年東大理$\boxed{3}$文$\boxed{3}$共通

曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点$\left(t,\dfrac{1}{t}\right)$ $(t>0)$ における、接線の方程式lは



$$y=-\frac{1}{t^2}(x-t)+\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}=-\frac{1}{t^2}(x-2t)$$

l と x 軸の交点は $(2t,\ 0)$ であるから　$2t \geqq 2$　$\therefore t \geqq 1$

l と直線 $x=1,\ x=2$ との交点は、$\left(1,\ -\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{2}{t}\right),\left(2,\ -\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{2}{t}\right)$ である。

四直線$l,\ y=0,\ x=1,\ x=2$ で囲まれる部分は台形であり、面積は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}-\frac{2}{t^2}+\frac{2}{t}\right)\cdot 1=\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{t^2}+\frac{4}{t}\right)=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

$t \geqq 1$ より、$0<\dfrac{1}{t}\leqq 1$ であり、S は $\dfrac{1}{t}=\dfrac{2}{3}$ のとき、$t=\dfrac{3}{2}$ のとき最大となる。

求める最大値は　$\therefore \dfrac{2}{3}$　……(答)