

1966 年東大文 [3]

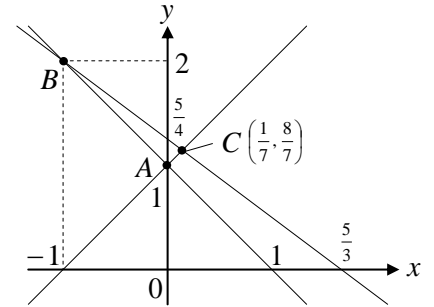
$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 & \text{---①} \\ x - y + 1 = 0 & \text{---②} \\ 3x + 4y - 5 = 0 & \text{---③} \end{cases}$$

①と②、①と③、②と③の交点をそれぞれ $A(0, 1)$, $B(-1, 2)$, $C\left(\frac{1}{7}, \frac{8}{7}\right)$ とする。

内心は3つの角の2等分線の交点である。今、 $\angle A = 90^\circ$ であり、 y 軸が $\angle A$ の2等分線になっているので、求める内心は y 軸上にあり、 $P(0, p)$ とおける。 P から①、②、③までの距離は等しい。

P と①の距離は $\frac{|0 + p - 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{p-1}{\sqrt{2}}$ ($\because p > 1$) P と②の距離も同じ。

P と③の距離は $\frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot p - 5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{5-4p}{5}$ ($\because p < \frac{5}{4}$)



$$\frac{p-1}{\sqrt{2}} = \frac{5-4p}{5} \quad 5(p-1) = \sqrt{2}(5-4p) \quad (5+4\sqrt{2})p = 5(1+\sqrt{2})$$

$$\therefore p = \frac{5(1+\sqrt{2})}{5+4\sqrt{2}} = \frac{5(1+\sqrt{2})(4\sqrt{2}-5)}{32-25} = \frac{15-5\sqrt{2}}{7} \quad \therefore r = \frac{p-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{8-5\sqrt{2}}{7} = \frac{-5+4\sqrt{2}}{7}$$

以上により、内心は $\left(0, \frac{15-5\sqrt{2}}{7}\right)$ 、内接円の半径は $\frac{-5+4\sqrt{2}}{7}$ ……(答)