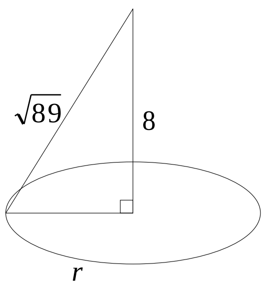
1966年東大文$\boxed{5}$新

球の中心の座標は$\left(\dfrac{10-6}{2}, \dfrac{2+10}{2}, \dfrac{5+11}{2}\right)=(2, 6, 8)$

半径は$\sqrt{(2-10)^2+(6-2)^2+(8-5)^2}=\sqrt{64+16+9}=\sqrt{89}$

(1)




中心$(2, 6, 8)$から$xy$平面までの距離は 8、球の半径は$\sqrt{89}$であるから

$xy$平面から切り取る円の半径$r$は　$r^2=89-64=25$　$\therefore r=5$

したがって、$xy$平面から切り取る円の面積は　$\pi r^2=25\pi$　……(答)

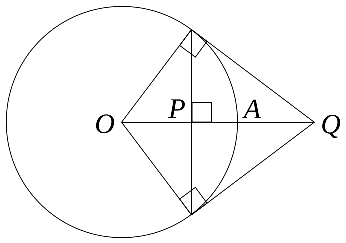
(2)

$z$軸上の点$(0, 0, z)$が球の内部にある条件は、中心$(2, 6, 8)$からの距離が$\sqrt{89}$以下であるから、

$$2^2+6^2+(z-8)^2=40+(z-8)^2 \leqq 89 \quad (z-8)^2 \leqq 49 \quad -7 \leqq z-8 \leqq 7 \quad \therefore 1 \leqq z \leqq 15$$

したがって、$z$軸から切り取る線分の長さは　$15-1=14$　……(答)

1966年東大文$\boxed{5}$旧




円の半径$r$、$\overline{OP}=t\ (0<t<r)$とする。このとき、$\overline{PA}=r-t$

直角三角形の相似性より

$$\overline{OP}:r=r:\overline{OQ}\quad \therefore \overline{OQ}=\frac{r^2}{t}\quad \therefore \overline{PQ}=\frac{r^2}{t}-t=\frac{r^2-t^2}{t}$$

これより　$\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PA}}=\dfrac{r^2-t^2}{t(r-t)}=\dfrac{r+t}{t}$

$P$が$A$に近づくとき、$t\to r$であるから　$\therefore \displaystyle\lim_{t\to r}\frac{\overline{PQ}}{\overline{PA}}=\frac{r+r}{r}=2$　……(答)