1966 年東大理 $\boxed{3}$

m を自然数とする。

$\overrightarrow{P_{3m-3}P_{3m-2}}$, $\overrightarrow{P_{3m-2}P_{3m-1}}$, $\overrightarrow{P_{3m-1}P_{3m}}$ は、それぞれ単位ベクトル $(1,\ 0)$, $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ と平行である。

$\overrightarrow{P_{3m-3}P_{3m-2}}$ の大きさを、L_m と表すと

$$\overrightarrow{P_{3m-3}P_{3m}}=\overrightarrow{P_{3m-3}P_{3m-2}}+\overrightarrow{P_{3m-2}P_{3m-1}}+\overrightarrow{P_{3m-1}P_{3m}}=L_m\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+2L_m\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}+4L_m\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}=L_m\begin{pmatrix}-2\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$L_{m+1}=2^3L_m=8L_m$ であり、$L_1=1$ であるから　$\therefore L_{m+1}=2^3L_m=8L_m$　$\therefore \overrightarrow{P_{3m-3}P_{3m}}=8^{m-1}\begin{pmatrix}-2\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$

これより

$$\overrightarrow{P_0P_{3m}}=\overrightarrow{P_0P_3}+\overrightarrow{P_3P_6}+\cdots+\overrightarrow{P_{3m-1}P_{3m}}=(1+8+\cdots+8^{m-1})\begin{pmatrix}-2\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}=\frac{8^m-1}{8-1}\begin{pmatrix}-2\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}=\frac{8^m-1}{7}\begin{pmatrix}-2\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

求める P_{3n} の座標は　$\left(-\dfrac{2}{7}(8^n-1),\ -\dfrac{\sqrt{3}}{7}(8^n-1)\right)$ ……(答)