1966年東大理$\boxed{5}$新

時刻 $t=0$ において、OX は x 軸に一致し、反時計回りに回転するとする。

$P(e^{2t}\cos t, e^{2t}\sin t)$ とおけて、$\begin{cases} x(t)=e^{2t}\cos t \\ y(t)=e^{2t}\sin t \end{cases}$ とすると、$\begin{cases} x'(t)=e^{2t}(2\cos t-\sin t) \\ y'(t)=e^{2t}(2\sin t+\cos t) \end{cases}$ より

$$\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2=e^{4t}(4\cos^2 t-2\sin t\cos t+\sin^2 t)+e^{4t}(4\sin^2 t+4\sin t\cos t+\cos^2 t)=5e^{4t}$$

求める道のりは

$$\therefore \int_0^{2\pi}\sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}\,dt=\sqrt{5}\int_0^{2\pi}e^{2t}dt=\sqrt{5}\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^{2\pi}=\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi}-1) \quad \cdots\cdots (答)$$

1966年東大理 $\boxed{5}$ 旧

$$\int_0^1 (3ax+2)(2x+b)dx=\int_0^1 \left\{6ax^2+(3ab+4)x+2b\right\}dx=\left[2ax^3+(3ab+4)\cdot\frac{x^2}{2}+2bx\right]_0^1=\frac{3}{2}ab+2a+2b+2=0$$

これより、$\frac{3}{2}ab=-2(a+b+1)$ $\therefore ab=-\frac{4}{3}(a+b+1)$

$a+b=k$ とおくと、$ab=-\frac{4}{3}(k+1)$ であり、a, b は2次方程式 $t^2-kt-\frac{4}{3}(k+1)=0$ の2解である。

実数解を持つ条件から、$D=k^2+\frac{16}{3}(k+1)\geqq 0$ $3k^2+16k+16\geqq 0$ $(3k+4)(k+4)\geqq 0$

したがって、$\therefore a+b\leqq -4,\ -\frac{4}{3}\leqq a+b$ ……(答)