1966年東大理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通

求める直線lのうち、y軸に平行ではないものの方程式を、$y=ax+b$とする。

このとき、l上の任意の点は、$(x,\ y)=(t,\ at+b)$と置ける。

$$4x+2y=4t+2(at+b)=(2a+4)t+2b \qquad x+3y=t+3(at+b)=(3a+1)t+3b$$

$(4x+2y,\ x+3y)$が再びl上の点であるから

$$(3a+1)t+3b=a\{(2a+4)t+2b\}+b \qquad (2a^2+a-1)t+2(a-1)b=0$$

これが任意のtについて成立するから

$$2a^2+a-1=0 \text{ ——①} \qquad (a-1)b=0 \text{ ——②}$$

①より　$2a^2+a-1=(2a-1)(a+1)=0$　$a=\dfrac{1}{2},\ -1$　②より　$a=1$または$b=0$

①かつ②となる条件は　$(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right),\ (-1,\ 0)$

求める直線lのうち、y軸に平行なものの方程式を、$x=a$とする。

このとき、l上の任意の点は、$(x,\ y)=(a,\ t)$と置ける。

$4x+2y=4a+2t$であり、$(4x+2y,\ x+3y)$が再びl上の点であるから　$4a+2t=a$　$t=-\dfrac{3}{2}a$

これは任意のtについて成立しないから、求める直線lに、y軸に平行なものは存在しない。

以上により、求める直線lは　$y=\dfrac{1}{2}x,\ y=-x$　……(答)

※行列$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$が表す一次変換による、不動直線を求める問題である。