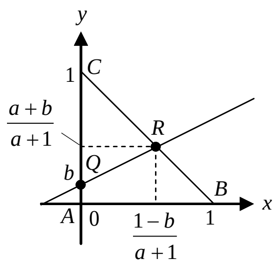
1967年東大文 $\boxed{4}$

$y=ax+b$ が AC, BC と交差するとき



AC との交点は $Q(0,b)$、BC との交点は $R\left(\dfrac{1-b}{a+1}, \dfrac{a+b}{a+1}\right)$ であり、

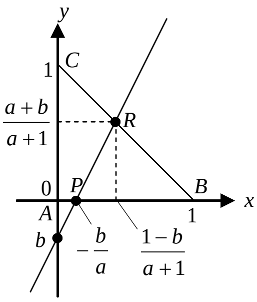
△ CQR の面積は $\quad \dfrac{1}{2}\cdot(1-b)\cdot\dfrac{1-b}{a+1}=\dfrac{(1-b)^2}{2(a+1)}=\dfrac{1}{4} \quad \therefore (1-b)^2=\dfrac{a+1}{2}$

$0 \leqq b < 1$ であるから、$0 < \dfrac{a+1}{2} \leqq 1 \quad a>0$ より $\quad \therefore 0 < a \leqq 1$

$a>0$ より、$\dfrac{a+b}{a+1} > b$ でなければならないが、$\dfrac{a+b}{a+1} - b = \dfrac{a(1-b)}{a+1} > 0$ であり、確かに成立。

$1-b=\sqrt{\dfrac{a+1}{2}} \quad \therefore b=1-\sqrt{\dfrac{a+1}{2}} \ (0 < a \leqq 1)$

$y=ax+b$ が AB, BC と交差するとき



AB との交点は $P\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$、$BC$ との交点は $R\left(\dfrac{1-b}{a+1}, \dfrac{a+b}{a+1}\right)$ であり、

△ BPR の面積は $\quad \dfrac{1}{2}\cdot\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\cdot\dfrac{a+b}{a+1}=\dfrac{(a+b)^2}{2a(a+1)}=\dfrac{1}{4} \quad \therefore (a+b)^2=\dfrac{a(a+1)}{2}$

$0 < -\dfrac{b}{a} < 1$ であるから、$0 < -b < a \quad \therefore a+b > 0 \quad a+b=\sqrt{\dfrac{a(a+1)}{2}} \quad \therefore b=\sqrt{\dfrac{a(a+1)}{2}}-a$

$b<0$ であるから $\quad a > \sqrt{\dfrac{a(a+1)}{2}} \quad 2a^2 > a^2+1 \quad a^2-1=a(a-1)>0 \quad \therefore a>1$

$a>0$ より、$\dfrac{1-b}{a+1} > -\dfrac{b}{a}$ でなければならないが、$\dfrac{1-b}{a+1}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a+b}{a(a+1)}>0$ であり、確かに成立。

$a>0$ より、$y=ax+b$ が AB, AC と交差することはないから、以上により

$$\therefore \begin{cases} 0 < a \leqq 1 \text{のとき} & b=1-\sqrt{\dfrac{a+1}{2}} \\ 1 < a \text{のとき} & b=\sqrt{\dfrac{a(a+1)}{2}}-a \end{cases} \quad \cdots\cdots (\text{答})$$