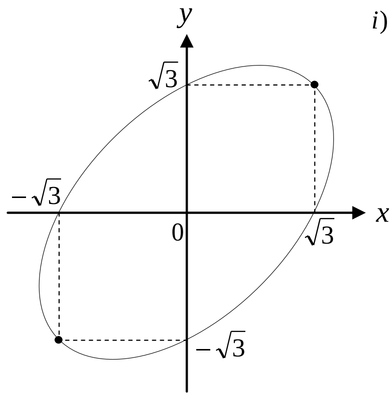
1967 年東大理 $\boxed{4}$

$x^2-xy+y^2=3$ 上の点 (x,y) を原点中心に $-45°$ 回転した点を (X,Y) とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} X-Y \\ X+Y \end{pmatrix}$$

曲線の式に代入すると

$$\frac{(X-Y)^2}{2}-\frac{(X-Y)(X+Y)}{2}+\frac{(X+Y)^2}{2}=3 \quad 2X^2+2Y^2-(X^2-Y^2)=6 \quad X^2+3Y^2=6 \quad \therefore \frac{X^2}{6}+\frac{Y^2}{2}=1$$

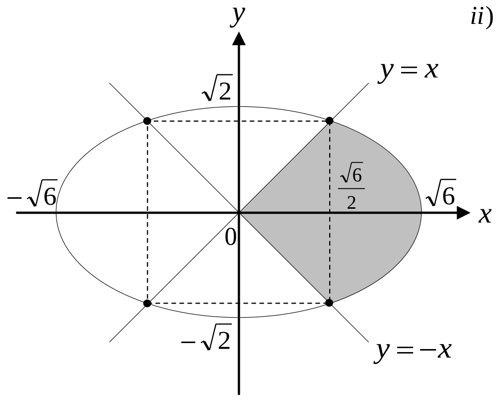


したがって、$x^2-xy+y^2=3$ は、楕円 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$ を

原点中心に $45°$ 回転したものであり、概形は図 i) の通り。

この第 1 象限にある部分と x 軸、y 軸で囲まれる部分の面積は、

図 ii) の網掛部の面積に等しい。



求める面積は　$S=2\times\left\{\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\sqrt{6}}\sqrt{6-x^2}\,dx\right\}$

$x=\sqrt{6}\sin\theta$ と置換すると　$dx=\sqrt{6}\cos\theta\,d\theta$

x	$\frac{\sqrt{6}}{2}\to\sqrt{6}$
θ	$\frac{\pi}{6}\to\frac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\sqrt{6}}\sqrt{6-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{6(1-\sin^2\theta)}\cdot\sqrt{6}\cos\theta\,d\theta=6\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)d\theta=3\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\frac{3}{4}\sqrt{3}$$

$$\therefore S=\frac{3}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(\pi-\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \quad \cdots\cdots(\text{答})$$