1967 年東大理 $\boxed{6}$ 新

すべての取り出し方は、$9!$ 通り。

題意を満たすカードの並べ方を考える。

元の番号と一致する 5 枚の組が、${}_9C_5$ 通りある。

元の番号と一致しない 4 枚を、元の番号が小さい順に $A,\ B,\ C,\ D$ とする。

これらがいずれも、元の番号と一致しない並べ方を、すべて書き出すと、9 通り。

$B,\ A,\ D,\ C$　$B,\ C,\ D,\ A$　$B,\ D,\ A,\ C$　$C,\ A,\ D,\ B$　$C,\ D,\ A,\ B$　$C,\ D,\ B,\ A$

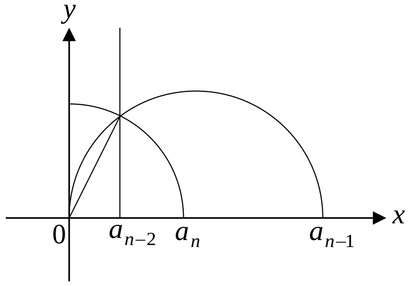
$D,\ A,\ B,\ C$　$D,\ C,\ A,\ B$　$D,\ C,\ B,\ A$

求める確率は

$$\therefore \frac{9\times{}_9C_5}{9!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{8!\cdot 4!}=\frac{9}{120\cdot 24}=\frac{1}{40\cdot 8}=\frac{1}{320}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

1967 年東大理 $\boxed{6}$ 旧

半直線 l を座標平面上の x 軸とし、点 A_n の座標を $(a_n,\ 0)$ 、 $A_0(0,\ 0)$ とする。



$a_{n-1} > a_{n-2}$ のとき　$X(a_{n-2},\ 0)$ 、$Y(a_{n-1},\ 0)$ であり、

A_0Y を直径とする円は　$\left(x-\dfrac{a_{n-1}}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a_{n-1}{}^2}{4}$

X における l の垂線は　$x=a_{n-2}$

$y \geqq 0$ の部分について考えると、Z の y 座標は

$$y=\sqrt{\frac{a_{n-1}{}^2}{4}-\left(a_{n-2}-\frac{a_{n-1}}{2}\right)^2}=\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}-a_{n-2}{}^2}$$

このとき　$\overline{A_oZ}=a_n=\sqrt{a_{n-2}{}^2+(a_{n-1}a_{n-2}-a_{n-2}{}^2)}=\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$　　$\therefore a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$

$a_{n-1} < a_{n-2}$ のとき　$X(a_{n-1},\ 0)$、$Y(a_{n-2},\ 0)$ であり、

A_0Y を直径とする円は　$\left(x-\dfrac{a_{n-2}}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a_{n-2}{}^2}{4}$　　X における l の垂線は　$x=a_{n-1}$

$y \geqq 0$ の部分について考えると、Z の y 座標は

$$y=\sqrt{\frac{a_{n-2}{}^2}{4}-\left(a_{n-1}-\frac{a_{n-2}}{2}\right)^2}=\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}-a_{n-1}{}^2}$$

このとき　$\overline{A_oZ}=a_n=\sqrt{a_{n-1}{}^2+(a_{n-1}a_{n-2}-a_{n-1}{}^2)}=\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$　　$\therefore a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$

したがって、いずれにしても、$a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$ が成り立つので、両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_n=\frac{1}{2}\log_2 a_{n-1}+\frac{1}{2}\log_2 a_{n-2}\qquad \log_2 a_n+\frac{1}{2}\log_2 a_{n-1}=\log_2 a_{n-1}+\frac{1}{2}\log_2 a_{n-2}$$

$n \geqq 2$ において $\log_2 a_n+\dfrac{1}{2}\log_2 a_{n-1}$ は一定である。$a_1=1,\ a_2=8$ より　$\therefore \log_2 a_n+\dfrac{1}{2}\log_2 a_{n-1}=3$

$$\log_2 a_n-2=-\frac{1}{2}(\log_2 a_{n-1}-2)\qquad \log_2 a_n-2=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(\log_2 a_1-2)=-2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\log_2 a_n=2\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\qquad \therefore a_n=2^{2\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}=4^{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$n\to\infty$ のとき、$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\to 0$ 、$a_n\to 4$ であるから、A_n は $(4,\ 0)$ に限りなく近づく。

したがって、$A=(4,\ 0)$ であるから　$\therefore \overline{A_0A}=4$　……(答)